Vectoren

Grootte of modulus ($\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = \overline{a}$):

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Scalair produkt ($\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Vectorieel produkt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{1_x} & \mathbf{1_y} & \mathbf{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 & \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 & \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \end{array}$$

Vectoriële functies

Laat men met elke waarde van een parameter t een gebonden vector $\overline{OP}$ overeenstemmen (met O een vast punt), dan bepaalt men de vectoriële functie

$$\mathbf{r}(t) = \overline{OP}(t)$$

t varieert $\rightarrow$ uiteinde van de $\mathbf{r} = \overline{OP}$ beschrijft een (ruimtelijke) kromme, de hodograaf van $\mathbf{r}$ of de baan van P.

Projectie van $\mathbf{r}$ op een orthogonaal assenstelsel levert de parametervergelijkingen van de baan, bv. in E_3:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Vectoriële afgeleide

$$\dot{\mathbf{r}}(t) == \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$\dot{\mathbf{r}}(t)$: gericht volgens de raaklijn aan $\mathbf{r}(t)$ in de zin van de stijgende parameterwaarden. Projectie op een orthogonaal assenstelsel geeft (in E_3) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$

Eigenschappen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(a\mathbf{r}) &= \frac{da}{dt}\mathbf{r} + a\frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r\mathbf{1_r}) = \frac{dr}{dt}\mathbf{1_r} + r\frac{d\mathbf{1_r}}{dt}
\end{aligned}$$

Raaklijn in het punt P ($\overline{OP} = \mathbf{r}(t_0)$)

$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ is gelegen volgens de raaklijn aan $\mathbf{r}(t)$ in $P \Rightarrow$ richtingsgetallen van de raaklijn:

$$(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

Parametervergelijkingen raaklijn:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + t\dot{x}(t_0) \\ y = y(t_0) + t\dot{y}(t_0) \\ z = z(t_0) + t\dot{z}(t_0) \end{cases}$$

Eliminatie van t levert

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}$$

Booglengte

Elementaire booglengte ds:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$):

$$\begin{aligned}
\frac{ds^2}{dt^2} &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\
&= v^2 \\
&\Downarrow \\
\frac{ds}{dt} &= v
\end{aligned}$$

Booglengte s gemeten van $P(t_0)$ tot $P(t)$:

$$s = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Natuurlijke parametervoorstelling

$\mathbf{r}$ als functie van de booglengte s, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, noemt men de natuurlijke parametervoorstelling.

Afgeleide:

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Conventie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \ ' \\ \frac{d}{dt} &= \ \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &\Downarrow \\ 1 &= \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

Normaalvlak door $P(t_0)$

$Q(x,y,z)$: Algemeen punt van het normaalvlak

Normaalvlak:

$$\overline{QP} \cdot \mathbf{1_t} = 0$$

met

$$\begin{aligned}\mathbf{1_t} &= \text{eenheidsvector volgens raaklijn} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\end{aligned}$$

Dus ($x_P = x(t_0)$, $y_P = y(t_0)$, $z_P = z(t_0)$)

$$x'(t_0) \cdot (x - x_P) + y'(t_0) \cdot (y - y_P) + z'(t_0) \cdot (z - z_P) = 0$$

of ($\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt}$)

$$\dot{x}(t_0) \cdot (x - x_P) + \dot{y}(t_0) \cdot (y - y_P) + \dot{z}(t_0) \cdot (z - z_P) = 0$$

Osculatievlak

Osculatievlak in $P\left(x(t), y(t), z(t)\right)$: vlak bepaald door $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ en $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt}$ in P.

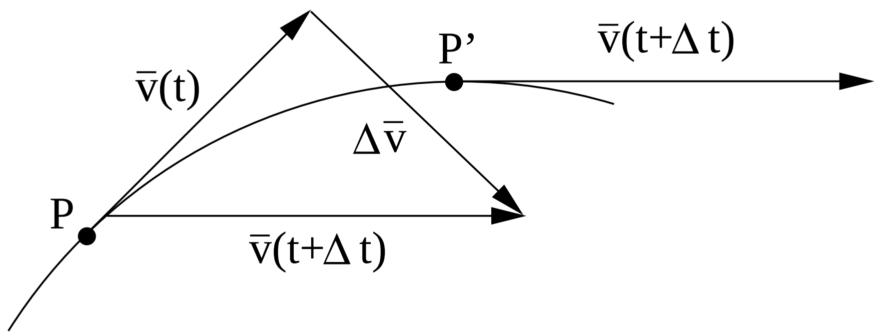
Normaal op het osculatievlak (binormale): $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$.

Vergelijking osculatievlak ($Q\,(x,y,z) = \text{punt v.h. vlak}$):

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \overline{PQ} = 0$$

Of:

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} = 0$$



Figuur 1: Osculatievlak

Drievlakshoek van Frenet

Hoofdnormale: snijlijn van het normaalvlak en het osculatievlak in P.

$\mathbf{1_n}$: eenheidsvector gelegen volgens de hoofdnormale, positief gericht naar de concaviteit van de projectie van de kromme op het osculatievlak.

Eenheidsvector $\mathbf{1_b}$ gelegen volgens binormale:

$$\mathbf{1_t} \times \mathbf{1_n} = \mathbf{1_b}$$

Drievlakshoek $(\mathbf{1_t}, \mathbf{1_n}, \mathbf{1_b})$ in een punt bepalen uit

$$\begin{aligned}
\mathbf{1_t} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \\
\mathbf{1_b} &= \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} \\
\mathbf{1_n} &= \mathbf{1_b} \times \mathbf{1_t}
\end{aligned}$$

of uit de formules van Frenet.

Kromtestraal (vlakke kromme)

Kromme gegeven door gewone parametervoorstelling $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = (x(t), y(t))$:

$$R = \pm \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

Kromme gegeven door natuurlijke parametervoorstelling $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$:

$$R = \pm \frac{1}{x'y'' - y'x''}$$

Kromme gegeven door $y = y(x)$:

$$R = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Kies teken zodanig dat $R > 0$. Kromming $k = \frac{1}{R}$.

Kromtestraal (ruimtelijke kromme)

Kromme gegeven door natuurlijke parametervoorstelling $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$:

$$R = \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^{-1/2}$$

Formules van Frenet

De formules van Frenet geven de variatie van de vectoren $\mathbf{1_b}$, $\mathbf{1_n}$ en $\mathbf{1_t}$ als het punt P de kromme doorloopt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{1_t}}{ds} &= \frac{1}{R}\mathbf{1_n} \\
\frac{d\mathbf{1_b}}{ds} &= \frac{1}{T}\mathbf{1_n} \\
\frac{d\mathbf{1_n}}{ds} &= -\frac{1}{R}\mathbf{1_t} - \frac{1}{T}\mathbf{1_b}
\end{aligned}$$

met

$$\begin{array}{ll}
R = \text{kromtestraal} & 1/R = \text{kromming} \\
T = \text{torsiestraal} & 1/T = \text{torsie}
\end{array}$$