

Module

Rechtlijnige Trillingen in Machines

Submodule

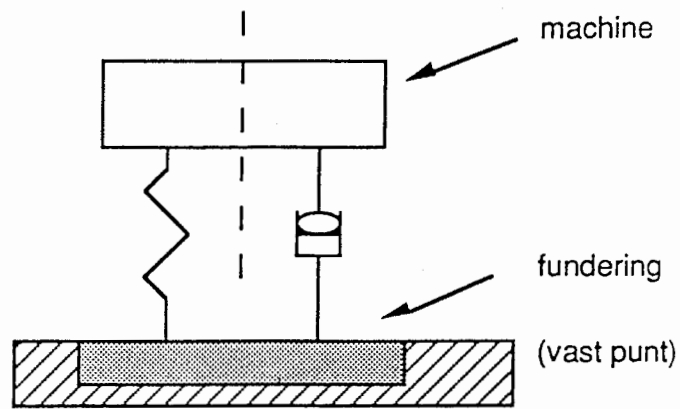
Systemen met 1 Vrijheidsgraad

Inhoudstabel

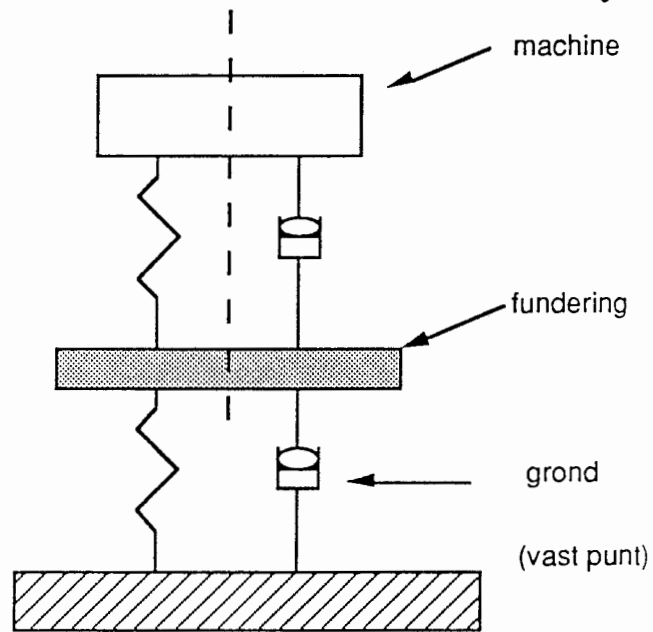
1. Modellisatie van een trillend systeem
2. Vrije trillingen - eigenfrequenties - gedwongen trillingen
3. Meting van mechanische trillingen
Meetgrootheden - absolute en relatieve metingen - meetprincipes-type opnemers
-bevestiging
4. Isolatie van trillende machines
Isolatietheorie - voorbeelden

Doel

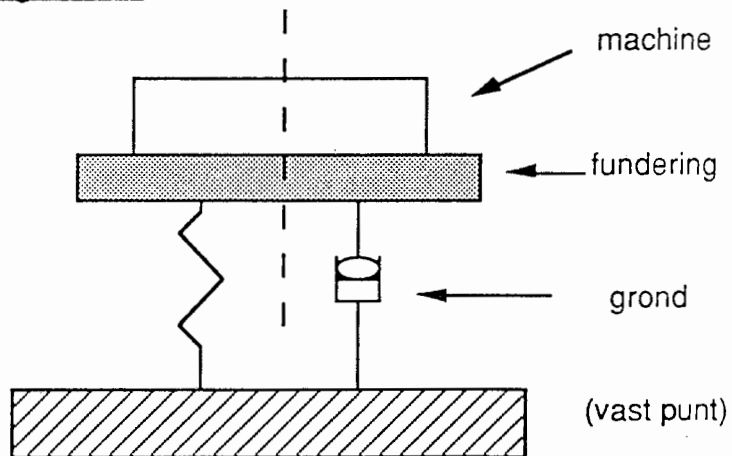
De bedoeling van deze submodule is de student aan te leren hoe van een complexe machine een wiskundig model gemaakt kan worden om de rechtlijnige trillingsbeweging te modelleren. De karakteristieke parameters, eigen aan het systeem nl. eigenfrequentie en eigenmodes worden eveneens gedefinieerd. Tevens wordt er summier ingegaan op de gebruikte trillingsopnemers. Tenslotte wordt het belangrijk probleem van de trillingsisolatie besproken



figuur 1.1 : modellisatie van een machine als een systeem met 1 V.G



figuur 1.2 : modellisatie van machine en fundering



figuur 1.3 : modellisatie van machine als massa en de fundering

1. MODELLEN VAN TRILLENDE MACHINES

In dit deel van de cursus zullen we het dynamisch gedrag van trillende machines bestuderen

De oorzaken van de trillingen kunnen velerlei zijn : door de werking van de machine ontstaan er naar gelang het geval alternerende krachten of centrifugaalkrachten, of andere traagheidskrachten en momenten en deze doen zekere massa's trillen, doordat er ergens elastische verbindingen bestaan, die een trillende beweging mogelijk maken.

De machine zelf is een complex geheel van machineonderdelen, assen, staven, onderstel, e.d. De machine rust op een fundering, die op de bodem rust (doch grond heeft ook elastische en dempende eigenschappen !) of op de vloer van een gebouw (idem). Het gehele systeem is zeer ingewikkeld.

Om de analytische en experimentele studie mogelijk te maken moeten we het werkelijk systeem in gedachte vervangen door een fysisch model, waaruit we dan een wiskundig model afleiden, waarmee we gaan rekenen.

Doorgaans zal men trachten het fysisch model zo eenvoudig mogelijk te houden, d.w.z. we kiezen het zodanig, dat het in redelijke mate overeenkomt met het verschijnsel dat we wensen te bestuderen.

Men dient er echter wel mee rekening te houden dat het fysisch en afgeleid wiskundig model slechts een grove benadering is van het werkelijk gedrag van de machine en met een hele reeks fenomenen geen rekening houdt.

Voorbeeld : een industriële dieselmotor

Een zescilinder industriële dieselmotor staat opgesteld op de vloer in een nijverheidshal. In de machine wordt de chemische energie van de dieselbrandstof omgezet in mechanische arbeid van de expanderende gassen op de zuigers. Elke zuiger is via een kruk-drijfstang-mechanisme verbonden met de krukas, die op zijn beurt het vermogen van de machine beschikbaar stelt om andere machines mee aan te drijven.

Zo een kruk-drijfstang-mechanisme is oorzaak van het ontstaan van zekere traagheidskrachten, die niet alle kunnen uitgebalanceerd worden, en deze traagheidskrachten veroorzaken op hun beurt trillingen.

Naar gelang het geval, en de gewenste graad van nauwkeurigheid zal men één of ander fysisch model kunnen opstellen, zoals hieronder aangegeven wordt.

1. De machine is ondersteld zich te gedragen als een starre blok, rustend op een starre fundering, met een elastische verbinding tussen machine en fundering.
(figuur 1.1)
2. Indien men wil rekening houden met elasticiteit en demping van de grond dan krijgt men een ingewikkelder model, bestaande uit een dubbel veer-massa-demper systeem.
(figuur 1.2)
3. In andere gevallen echter is er een starre verbinding tussen machine en fundering, doch deze laatste rust op de grond, die zelf weer elastische eigenschappen heeft, alsook demping vertoont.
(figuur 1.3)

Een model bestaat uit geïdealiseerde elementen, en men noemt het een discreet systeem, omdat het bestaat uit starre massa's (met uitsluitend traagheidseigenschappen), veren (met uitsluitend elastische eigenschappen) en dempers (met uitsluitend dempende eigenschappen).

Het tegengestelde van een discreet systeem is een kontinu systeem, dat verdeelde massa en verdeelde elastische en dempingeigenschappen heeft, en daarom ook met andere wiskundige hulpmiddelen moet bestudeerd worden (bv. de eindige elementen methode).

In deze cursus wordt voornamelijk de machine-als-geheel bestudeerd en volstaat een diskreet model, met geïdealiseerde elementen voorgesteld door z.g. systeem parameter m voor massa, b voor demping, k voor stijfheid. Deze worden tijdsinvariant ondersteld.

Niettegenstaande zijn beperkingen is een discreet model nuttig om de volgende redenen:

- . vele werkelijke systemen zijn essentieel discreet;
- . de basisconcepten zijn eenvoudig en daarom vormend voor de geest;
- . de ingevoerde begrippen laten tevens toe om het gedrag van complexe systemen te begrijpen
- . sommige werkelijke systemen zijn te complex om ze in één keer te beschouwen, en worden daarom verdeeld in een aantal eenvoudige systemen.
- . het discreet model met een zeer groot aantal vrijheidsgraden toont de overgang naar de oplossing van het continu systeem.

Om het op te stellen komt het er dus op aan de diverse parameters van het systeem te onderkennen.

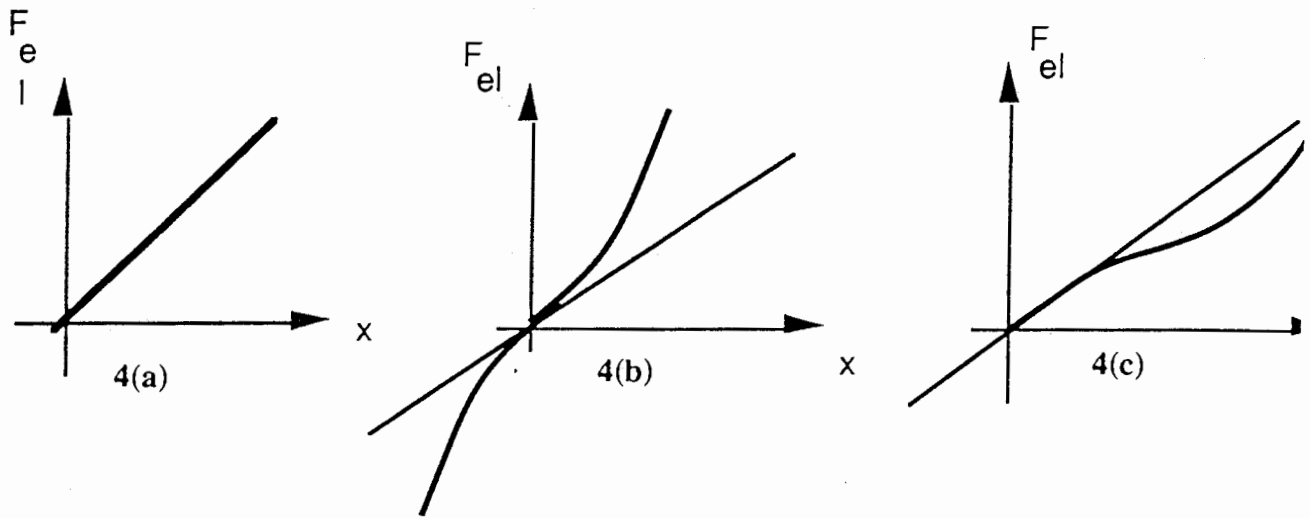
1.1. Massa of traagheidsmoment (m, I)

Wanneer men een trillend systeem bestudeert zal men allereerst de aandacht vestigen op de massa of massa's. Men moet ze nauwkeurig afbakenen en er de positie van bepalen door geschikte coördinaten te kiezen. Van al deze massa's zal men moeten vaststellen welke er bewegen (en waarvan men dus de beweging zal wensen te bestuderen), en welke andere massa's stilstaan (steunpunt of fundering). In sommige problemen zal een steunpunt echter een gekende beweging hebben, en op die wijze het systeem exciteren. Van de bewegende diskrete massa's onderstellen we dat ze star, dus onvervormbaar zijn. De positie ervan wordt met een eindig en doorgaans klein aantal coördinaten beschreven, wat vaak een vereenvoudiging is bij de studie.

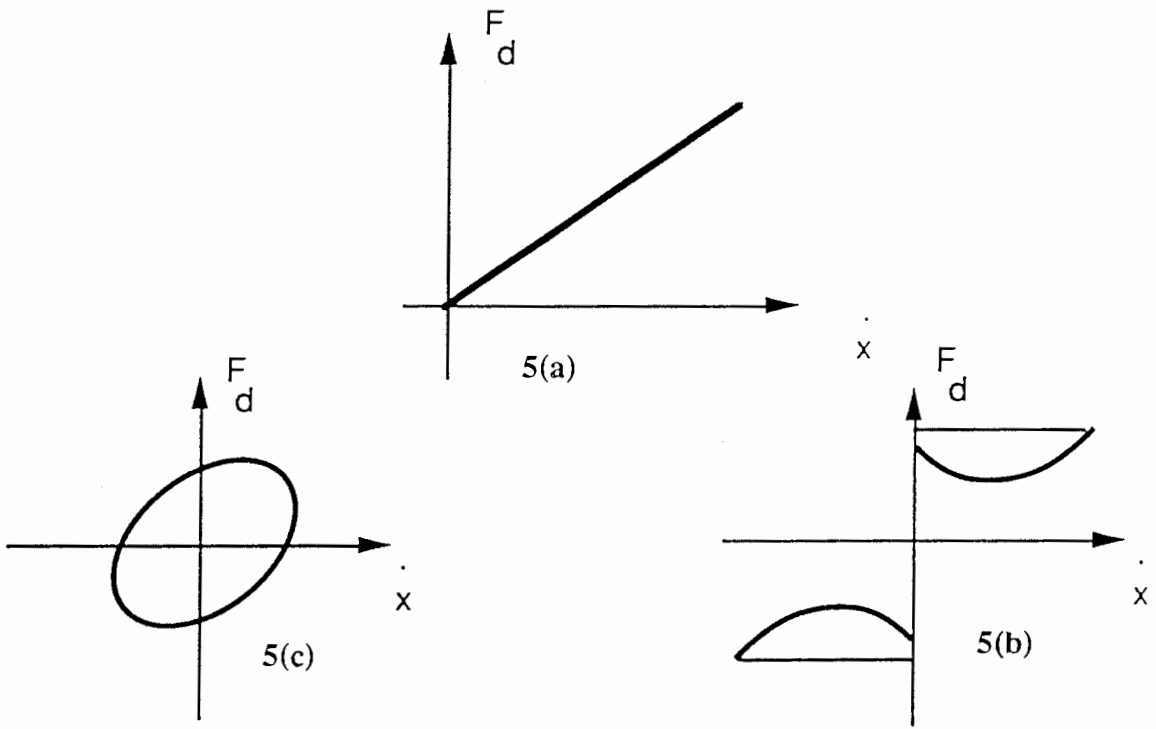
Nemen we als voorbeeld een machine, die van zijn fundering geïsoleerd is m. b. v. trillingsisolatoren (bv. rubber elementen). Indien we ons uitsluitend interesseren voor de trillingsisolatie, volstaat het in vele gevallen de machine vervangen te denken door een puntmassa, waarvan de beweging door één enkele coördinaat beschreven wordt. Men kan echter een stap verder gaan en stellen dat de machine een zekere fysische omvang heeft, en bovendien een vlakke beweging uitvoert zodat de traagheidseigenschappen beschreven worden door massa en traagheidsmoment. Er zijn in dit geval reeds meerdere coördinaten nodig om de beweging te beschrijven. Zo kan men overgaan op 3 en zelfs 6 graden van vrijheid voor eenzelfde machine.

$$\text{vb. } E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1 \text{ V. G.}) \quad E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3 \text{ V. G.})$$

E_k = opgestapelde kinetische energie



figuur 1.4 : verandering van de elastische veerkracht als functie van de verplaatsing : (a) lineaire veer, (b) verhardend karakter,(c) verzachtend - verhardend veer karakter



figuur 1.5 : dempingskracht als functie van snelheid :
 (a) viskeuze demping
 (b) coulomb demping
 (c) structurele demping

1.2. de veerstijfheid (k) (fig.1.4)

Van een ideale veer wordt ondersteld dat hij zuiver elastisch is en geen massa en ook geen demping heeft. De veer veroorzaakt een z.g. "terugroepkracht" zodra hij vervormd wordt. Voor een lineaire veer is deze kracht evenredig met de vervorming, die de veer ondergaat, dus evenredig met het verschil van de verplaatsingen van de twee uiteinden (voor het typische geval van een helicoïdaal gewonden veer) :

$$F_v = k (x_2 - x_1) = kx \quad x = x_2 - x_1 \quad (1.1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot kx^2 \quad \text{opgestapelde potentiële energie}$$

We merken hierbij op dat de veer het elastisch gedrag voorstelt van de structuur. In sommige gevallen gaat het hier om spiraal, schroef-of bladveren. Meestal echter speelt de stijfheid van de structuur in meer of mindere mate mee.

In het geval de veer niet lineair is, zal de differentiaalvergelijking van de beweging ook niet lineair zijn. In het kader van deze cursus zal steeds een lineair veergedrag ondersteld worden. Niet-lineair veergedrag wordt behandeld in [4].

1.3. De dempingsconstante (b). (fig.1.5)

Een ideale demper heeft geen massa en geen elasticiteit. Een demper veroorzaakt een passieve weerstandskracht, d.w.z. een die zich tegen de beweging verzet. Deze kracht is voor een lineaire demper evenredig met het verschil tussen de snelheden van beide uiteinden van de demper.

Een lineaire demper is een abstractie van de geest, doch biedt het voordeel dat de passieve weerstandskracht aanleiding geeft tot een lineaire differentiaalvergelijking voor de beweging van het massa-veer-dempersysteem, waarvoor een oplossing gemakkelijk te schrijven is.

Voor een passieve weerstand die te wijten is aan een fluïdum in laminare stroming (= geval van de hydraulische dempers op motorfietsen, auto's, enz ...) . geldt in werkelijkheid de lineaire wet met goede benadering. Men spreekt daarom ook wel van viskeuze demping.

$$F_d = b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = b\dot{x} \quad \dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

$$W = b \cdot \dot{x}^2 = \text{ogenblikkelijk gedissipeerd vermogen} \quad (1.2)$$

In het geval van Coulomb-wrijving, turbulente stroming en/of structurele demping is het lineair, viskeus model niet geldig, met als gevolg dat de differentiaalvergelijking van de beweging niet lineair wordt. Eventueel zal men in een dergelijk geval een ekwivalente viskeuze demping berekenen.

1.4. Het opstellen van de bewegingsvergelijking.

Een trillend systeem heeft doorgaans een evenwichtstoestand, d.w.z. een positie waarin het zich bevindt wanneer er geen excitatie op inwerkt. Een excitatie is een uitwendige wisselende kracht (of moment) die inwerkt op de trillende massa (of traagheidsmoment). Het kan echter ook een wisselende beweging van een steunpunt zijn. (bv. een wiel, rollend over een golvend wegdek, veroorzaakt de bewegingen van de autocarrosserie.) Wij zullen onderstellen dat er slechts één evenwichtspositie is.

In een bewegingsvergelijking schrijft men het evenwicht tussen traagheidskrachten ($m\ddot{x}$) terugroepkrachten (kx); dempingskrachten ($b\dot{x}$) en excitatiekrachten (F).

Zolang de coefficient b van het viskeus dempingsmodel positief is, zal het systeem een stabiele beweging hebben, en is de evenwichtspositie stabiel. Doch wanneer de damping negatief is zal de bewegingsamplitude (theoretisch) onbeperkt toenemen: er is dynamische onstabieliteit. Negatieve wrijving komt in de werktuigkunde voor, bv. tussen werkstuk en beitelpunt van een draaibank.

In deze cursus worden enkel lineaire systemen bestudeerd, die een kleine trillende beweging uitvoeren in de onmiddellijke nabijheid van de evenwichtspositie.

De beweging wordt in dit geval beschreven door een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten waarbij we vooral niet mogen vergeten dat dit alles enkel en alleen te danken is aan het feit dat er voorafgaandelijk gelineariseerd werd. Zij stellen dus een benadering van de werkelijkheid voor.

Beschouwen we nu de geïdealiseerde voorstelling van de machine uit **figuur 1.1**, dan is de bewegingsvergelijking hiervan in afwezigheid van uitwendige krachten:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (1.3)$$

Indien men in de eerste benadering de demping verwaarloost, bekomt men

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.4)$$

Dit is een eigenwaarde probleem, welke een oplossing heeft verschillend van de nuloplossing voor de eigenpulsatie

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

De eigenfrekwentie is dan

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.6)$$

De machine trilt in dit geval op een harmonische wijze op een frekwentie f_n

$$x = X \sin \omega_n t \quad (1.7)$$

De machine blijft, in afwezigheid van krachten of storingen, oneindig lang trillen op deze frekwentie. Hiervoor is geen energie nodig.

In de praktijk is er echter steeds demping aanwezig. De oplossing is dan afhankelijk van de grootte van de dempingskracht. In het meest voorkomend geval van kleine demping ($b^2 < 4 km$) wordt dit :

$$x = X e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\Omega t + \phi)$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$
(1.8)

De trilling wordt een tijdje onderhouden maar sterft tenslotte uit. De snelheid waarmee dit gebeurt wordt aangegeven door het logaritmisch decrement, dat de verhouding voorstelt van twee opeenvolgende maxima (of minima)

$$\delta = \frac{2 b \pi}{\sqrt{4 k m - b^2}}$$
(1.9)

Bij machines is de hierboven bestudeerde trilling een overgangsverschijnsel en zal men voornamelijk moeten rekening houden met de gedwongen trilling.

Vergelijking 1.4 kan ook afgeleid worden via het behoud van energie.

Een conservatief systeem is enkel onderworpen aan traagheidskrachten en terugroepkrachten, d.w.z. er is geen demping en geen excitatie (er wordt geen energie afgevoerd of toegevoerd).

Laat : T : kinetische energie (van de bewegende massa)
 U : potentiële energie (elastische vervormingsenergie opgeslagen in de vervormde veer)

dan geldt voor een conservatief systeem :

totale mechanische energie = T + U = constante

ofwel $\frac{d}{dt} (T + U) = 0.$ (1.10)

De z.g. "energiemethode" is enkel te gebruiken op systemen met één vrijheidsgraad. Beschouwen we een massa-veer systeem, waarbij de massa opgehangen is aan de veer. De veer heeft oorspronkelijk een "vrije lengte", en hij ondergaat een "statische" vervorming Δ wanneer de massa er aan opgehangen wordt, zonder trillen. De massa verkeert dan in statisch evenwicht. Vervolgens geven we de massa m een verplaatsing x_{\max} vanuit deze evenwichtspositie gerekend, en hij gaat trillen met amplitude $x(t)$.

Op elk ogenblik geldt :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

kinetische energie massa (1.11)

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

potentiële energie van de veer (1.12)

$$\frac{d}{dt} (T + U) = (m \ddot{x} + kx) \dot{x} = 0. \quad (1.13)$$

Aangezien de snelheid niet voor alle waarden van de tijd nul kan zijn blijft er :

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0. \quad (1.14)$$

Dit is de bekende bewegingsvergelijking (zie 1.6)

Laat : $\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ (eigen cirkelfrekwentie of pulsatie)

dan is : $x = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$ (1.15)

$$= X \cdot \cos(\omega_n t - \phi) \quad \text{met } X = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{B}{A}$$

een oplossing, zoals gemakkelijk kan aangetoond worden. De integratie constanten worden bepaald aan de hand van gekende beginvoorwaarden van de beweging : $x(0)$ en

$$\dot{x}(0). \text{ In ons voorbeeld : } x(0) = x_{\max} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Aangezien voor het systeem in rust geldt dat :

$$m.g. = k \cdot \Delta \quad \Delta : \text{statische vervorming door m.g.}$$

volgt er : $\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ (hoekfrekwentie, pulsatie)

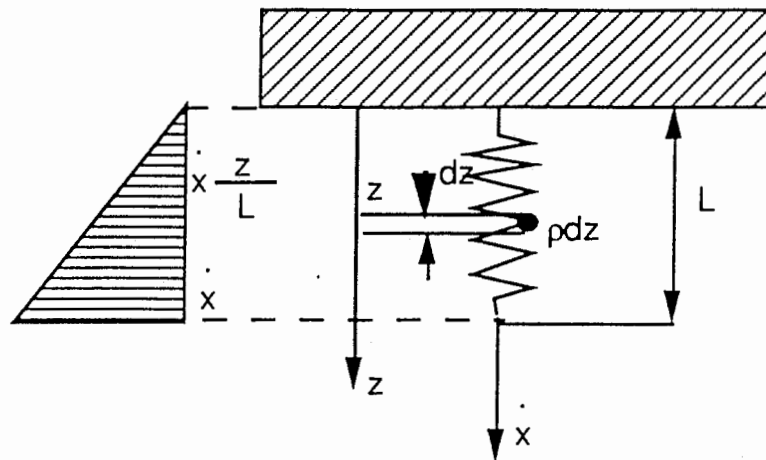
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{g}{\Delta}\right)^{1/2} \quad \text{(eigenfrekwentie)} \quad (1.16)$$

Dit is een zeer praktische betrekking : de eigenfrekwentie van dit massaveersysteem kan berekend worden aan de hand van de statische vervorming Δ van de veer.

Men kan ook van Rayleigh's methode gebruik maken om de eigenfrekwentie van dit systeem te berekenen.

Deze berust op de volgende gedachtengang : de eigenfrekwentie is de maat van de snelheid waarmee de uitwisseling tussen potentiële en kinetische energievormen plaatsvindt in het systeem, gedurende de trillende beweging.

$$\text{Totale mechanische energie} = T_{\max} = U_{\max}$$



figuur 1.6 : lineaire snelheidsverdeling in een trillende veer

Laat : $x = X \cos (\omega_n t - \phi)$

$$\dot{x} = -\omega_n \cdot X \sin (\omega_n t - \phi)$$

Dan is : $T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega_n^2 X^2$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k \cdot X^2$$

waaruit door gelijkstellen :

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2}$$

1.5. De ekwivalente massa van een veer

Onderstel nu dat de werkelijke veer een verdeelde massa heeft, die niet verwaarloosbaar klein is t.o.v. de starre massa m , die eraan bevestigd is. De berekende eigenfrequentie zou fout zijn, indien de werkelijke veer enkel door een stijfheidsconstante zou gemodeliseerd worden.

We zullen daarom de werkelijke veer vervangen door een model bestaande uit een ideale veer, met op het uiteinde een ekwivalente massa, die rekening houdt met het effect van de verdeelde massa.

Men neemt aan dat de snelheidsverdeling van de veer over zijn hele lengte lineair is. (n.b. deze hypothese is bij benadering geldig op voorwaarde dat de veer trilt aan een frequentie die veel kleiner is dan zijn eigen eerste eigenfrequentie, waarbij de veer als continu systeem beschouwd wordt).

Om de berekening uit te voeren steunen we op het behoud van energie :

$$\max (P.E.) = \max (K.E.)$$

De massa heeft een beweging $x = X \cdot \cos \omega_n t$.

De maximum potentiële energie van de veer bedraagt :

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k X^2$$

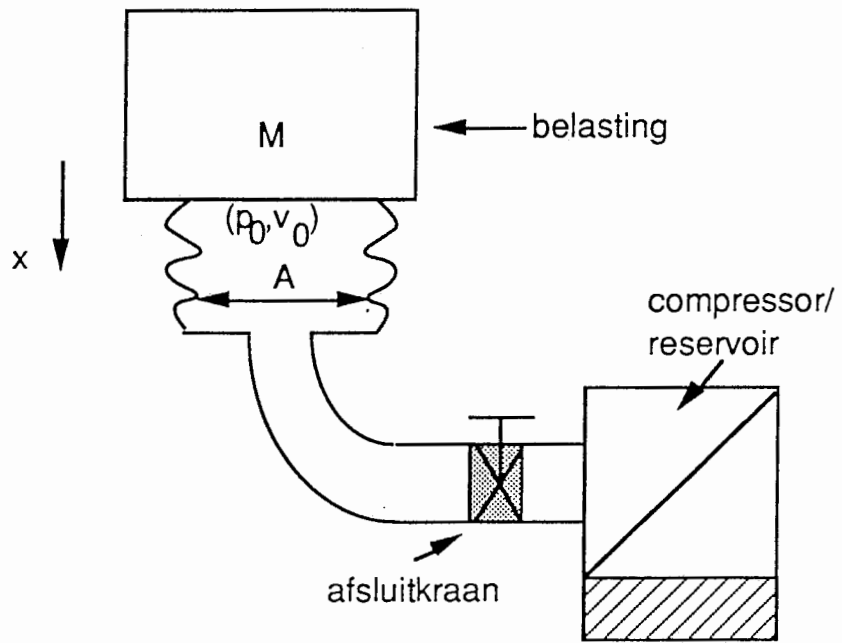
De trillende starre massa heeft een kinetische energie

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \cdot \omega_n^2 X^2$$

Doch daar moet nog bijkomen de (benaderde) waarde van de kinetische energie van de veer zelf, alvorens we bovenvermeld theorema mogen toepassen.

Laat :

L : totale vrije lengte van de veer bij statisch evenwicht.



figuur 1.7 : pneumatische vering van een voertuig

ρ : massa per lengte-eenheid van de veer.

z : coördinaat van een willekeurig punt van de veer.

ρdz : massa van elementair deeltje dz van de veer

$\frac{z}{L} \dot{x}(t)$: snelheid van elementaire massa ρdz (Figuur 1.6)

Dan wordt de maximum waarde van de kinetische energie van de veermassa gelijk aan:

$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{z}{L} \dot{x}_{\max} \right)^2 \rho dz = \frac{1}{2} \frac{\rho}{L} \dot{x}_{\max}^2 \int_0^L z^2 dz$$

$$\dot{x}_{\max} = \omega_n X$$

$$T(\text{veer})_{\max} = \frac{1}{6} \rho L \omega_n^2 X^2$$

Gelijkstelling der energiën geeft : $U(\text{veer})_{\max} = T(\text{massa})_{\max} + T(\text{veer})_{\max}$

$$\frac{1}{2} k X^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 X^2 \Rightarrow T(\text{veer})_{\max} = \frac{1}{6} \rho L \omega_n^2 X^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho L}{3} \right) \omega_n^2 X^2$$

$$\text{waaruit : } \omega_n = \left(\frac{k}{m + \frac{\rho L}{3}} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

Men zal dus één derde van de veermassa tellen bij de starre massa om de eigenfrequentie van het massa-veersysteem te berekenen.

1.6 Praktisch voorbeeld : Pneumatische vering van een voertuig.(Figuur1.7)

Soms gebruikt men luchtvering in plaats van de klassieke metaalveren (spiraalveren, bladveren e.a.). Deze oplossing biedt een hele reeks voordelen, zoals we verder zullen zien.

M : massa van de belasting van het systeem.

A = doorsnede van de pneumatische veer. Bij rust is in dit volume een hoeveelheid gas

V_0 , aan een druk p_0 . Als er beweging optreedt, zal er voor een zekere x de toestand (p, V) heersen.

$$\text{Veerstijfheid } k = \frac{\Delta A dp}{dx}$$

Indien we de toestandsverandering adiabatisch onderstellen :

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = c^{\text{te}} \rightarrow p = p_0 V_0^\gamma \cdot V^{-\gamma}$$

$$dp = \rho_0 V_0^\gamma (-\gamma) V^{-\gamma-1} dV.$$

$$V = V_0 - Ax. \rightarrow dV = -A \cdot dx.$$

$$\text{vermits } k = \frac{A dp}{dx} = \rho_0 V_0^\gamma (\gamma) (V_0 - Ax)^{-\gamma-1} A^2$$

Voor kleine trillingen kunnen we $(V_0 - Ax)^{-\gamma-1}$ in reeks ontwikkelen.

$$(V_0 - Ax)^{-\gamma-1} \cong V_0^{-\gamma-1} + (\gamma+1)AxV_0^{-\gamma-2}$$

Indien we hiervoor slechts de 1e term beschouwen en de andere termen verwaarlozen, vinden we :

$$k = \rho_0 \gamma V_0^{-1} A^2$$

Verder is ook

$$M \cdot g = p_0 A$$

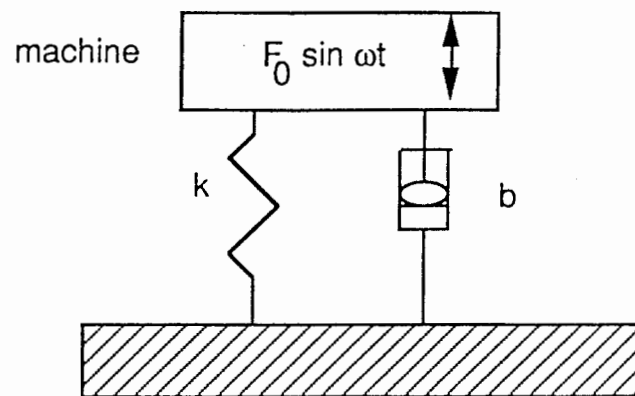
zodat de eigenfrequentie wordt :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\gamma A \frac{g}{V_0}}$$

Besluit :

- ω is onafhankelijk van de massa M
- men kan er voor zorgen dat ω steeds konstant is door V_0 te regelen (V_0 terug op de oorspronkelijke waarde brengen zodra de belasting van het voertuig een verandering heeft ondergaan). Dit is zeer belangrijk i.v.m. het rijcomfort. Daarom wordt dit systeem toegepast bij reisbussen en vrachtwagens, bestemd voor internationaal transport.

Bij een klassiek veersysteem met metalen veren (bv. schroefveren) en dempers, is de eigenfrequentie van de wagen afhankelijk van de belasting. De efficiënte werking van het veersysteem als trillingsisolator is daarom ook sterk afhankelijk van de belasting zoals we zullen zien in het hoofdstuk over trillingsisolatie.



figuur 2.1 :

model van machine onderworpen aan een periodische kracht $F_0 \sin \omega t$

2. Gedwongen trillingen - één vrijheidsgraad

2.1 Basisbegrippen

We beschouwen hetzelfde systeem (massa, veerkracht, demping) als voorheen, doch laten er nu een periodische (uitwendige) kracht op aangrijpen. (**Figuur 2.1**)

De trillingen worden in dit geval onderhouden.

We onderstellen dat :

- amplitude van kracht = $F_0 = \text{cte.}$
- frekwentie van kracht = veranderlijk

$$0 < \omega < \infty$$

Indien de kracht periodiek is, kunnen we de Fourier Analyse toepassen om er de verschillende harmonische componenten van te bepalen gezien we te maken hebben met een lineair systeem. We kunnen daarna de invloed van elke component apart op het systeem beschouwen gezien we te maken hebben met een lineair systeem. Zonder aan de algemeenheid van de behandeling te schaden, kunnen we ons dus beperken tot een sinusoidale kracht.

De bewegingsvergelijking is :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_0 \cdot \sin \omega t \quad (2.1)$$

Het linker lid hiervan zijn we reeds tegengekomen, en dit laat ons toe te zeggen dat we de oplossing van de homogene differentiaal vergelijking kennen. In de praktijk van de trillingsmechanica noemt men die oplossing het overgangsverschijnsel aangezien ze alleen optreedt juist in het begin, wanneer F het systeem begint te exciteren.

Om de complete oplossing van de 2e orde vergelijking met 2e lid te hebben, moeten we er nog de particuliere oplossing bijvoegen, of zoals we in de trillingsmechanica zeggen, de "permanente" oplossing of het "permanent" regime.

Met deze laatste zullen we ons nu bezig houden :

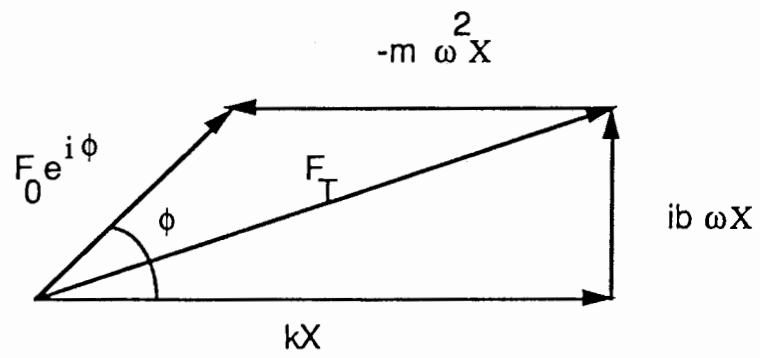
Deze permanente oplossing heeft de vorm :

$$x = X \cdot \sin (\omega t - \phi)$$

d.w.z. men kan bewijzen dat deze oplossing voldoet aan de differentiaal-vergelijking, waarin

$$\begin{aligned} X &= \text{amplitude van het permanent regime} \\ \omega &= \text{cirkelfrekwentie van de aangrijpende kracht F.} \\ \phi &= \text{fazehoek. Dit is de hoek waarmee de beweging x naijlt} \end{aligned}$$

op de aangrijpende kracht $F_0 \sin \omega t$; d.w.z. de reactie komt iets laattijdiger dan de actie. De oorzaak van dit naijlen is de aanwezigheid van de demping.



figuur 2.2 : krachtenvektordiagram van veer-massa-demper systeem

Vaak gebruikt men ook de complexe schrijfwijze, die wat aangener is om mee te werken :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

$$x = X \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Substitueren we deze oplossing in de gegeven vergelijking :

$$\frac{dx}{dt} = i\omega \cdot X \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot X \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Dit geeft :

$$[-m \cdot \omega^2 + i b\omega + k] X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = F_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Deze vergelijking stelt een draaiend vektordiagram (**Figuur 2.2**) voor (vektorveelhoek) en we mogen daarbij natuurlijk niet vergeten dat ons trillingsprobleem voorgesteld wordt door de projectie hiervan op een vaste as.

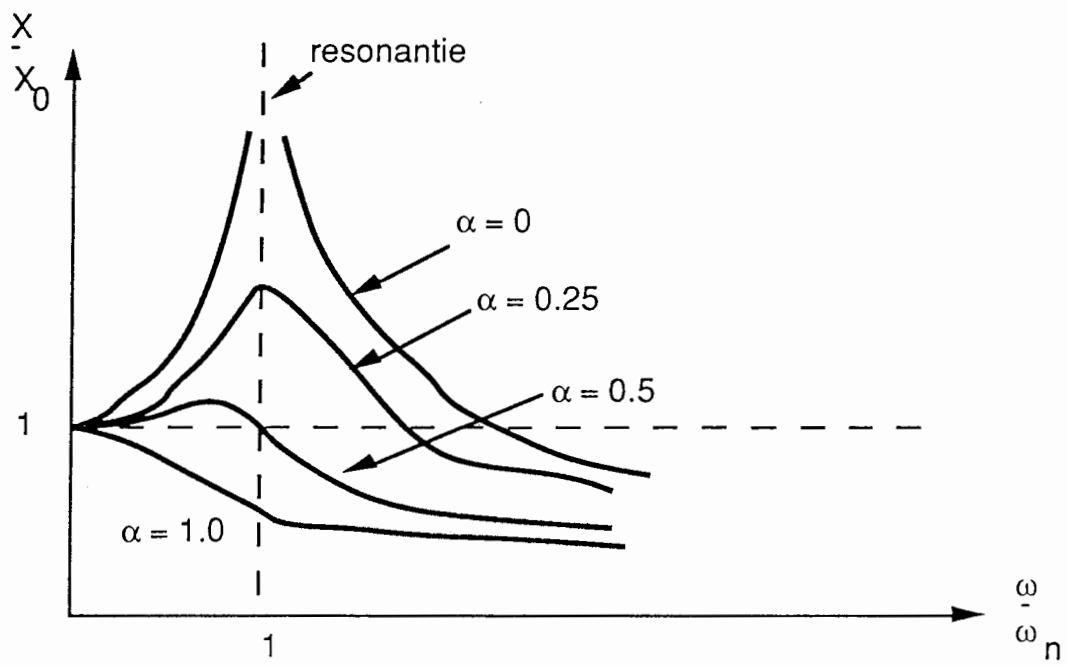
In deze figuur is de kracht F_T gelijk aan de som van kX (veerkracht) en $j\omega b x$ (dempingskracht). Dit is, zoals we later zullen zien (paragraaf 4), de kracht, die door het trillend systeem overgedragen wordt op de omgeving.

Om nu dat draaiend vektordiagram eens goed te kunnen bekijken, moeten we er even met een stroboscoop naar kijken, die de beweging tijdelijk "bevriest". Wiskundig bereiken we dit zelfde doel, door beide leden te delen door $e^{i\omega t}$. (dit is de eenheidsvektor die rond de oorsprong draait met een hoeksnelheid ω).

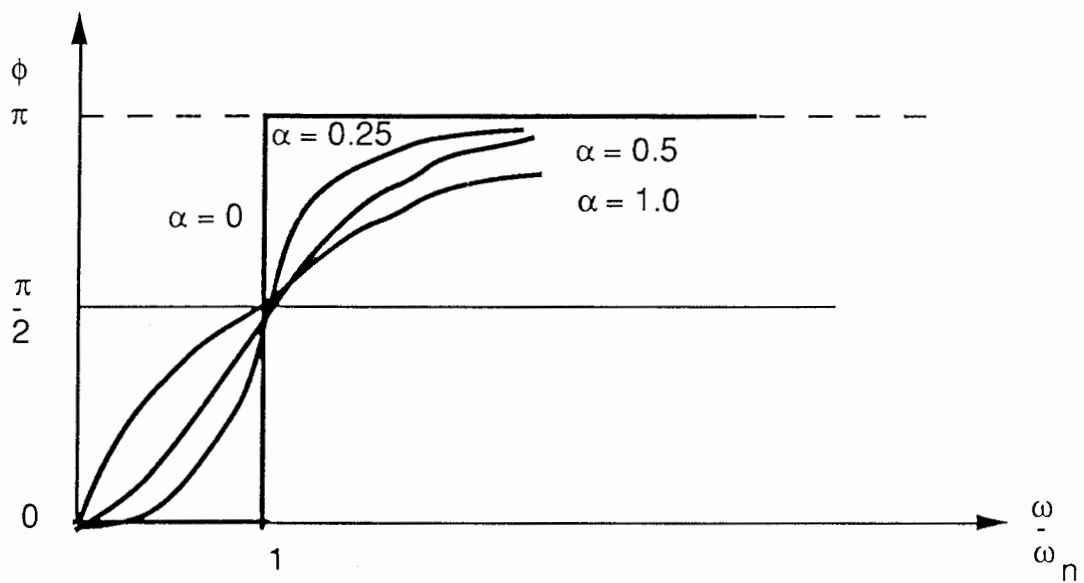
$$(-m \cdot \omega^2 + i b\omega + k) \cdot X \cdot e^{-i\phi} = F_0$$

$$\text{Waaruit : } X \cdot e^{-i\phi} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i b\omega}$$

$$\text{Amplitude : } X = \text{mod} \left[\frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i b\omega} \right] = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (2.4)$$



(a)



(b)

figuur 2.3 : (a) voorstelling van $\frac{X}{X_0}$ als functie van ω / ω_n
 (b) voorstelling van de faze als functie van ω / ω_n

$$\text{Phase} \quad : \quad -\phi = \arg (X \cdot e^{-i\phi}) = -\text{bgtg} \left(\frac{b\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.5)$$

opmerking : Men kan dimensieloze grootheden invoeren als men teller en noemer deelt door k :

$$\frac{F_0}{k} = X_0 \quad \text{en} \quad (k/m) = \omega_n^2$$

$$\frac{b \cdot \omega}{k} = \frac{b}{k} \omega_n \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{b}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{b}{\sqrt{mk}} \frac{\omega}{\omega_n} = 2\alpha \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\text{met} \quad \alpha = \frac{b}{2 \sqrt{mk}}$$

Er volgt:

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \alpha \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{2 \cdot \alpha \cdot (\omega / \omega_n)}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \quad (2.6)$$

Men noemt :

$$\frac{X}{X_0} = f \left(\alpha, \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad \text{dynamische versterkingsfaktor}$$

De versterkingsfactor is het getal waarmee de statische doorbuiging X_0 moet vermenigvuldigd worden om de dynamische doorbuiging X te kennen, overeenstemmend met de waarden van α ; ω_n en ω .

Deze formules zijn grafisch voorgesteld in **fig. 2.3**.

Merk op dat hoe zwakker de demping hoe hoger de piekwaarde bij resonantie wordt.

Inderdaad wordt de amplitude bij de resonantiefrekventie enkel en alleen bepaald door de demping, zoals men kan bemerken als men $\omega = \omega_n$ stelt in vergelijking (2.6)

Opmerking : als $\omega = \omega_n$ dan is er "faze resonantie". Amplituderesonantie heeft men bij een frekventie die daar lichtjes van afwijkt, afhankelijk van de waarde van α . De



gevaaren van resonantie zijn de volgende: sterke trillingen, breuk van het elastisch element door metaalmoeheid of door overbelasting.

2.1.1 Bijzonder geval: excitatie door kracht die functie is van de draaisnelheid

Door allerlei konstruktieve en andere oorzaken, (zie module: Uitbalanceren van starre rotoren) bestaat er een onbalans in de roterende delen van de machine. Deze veroorzaakt een centrifugale kracht die trillingen doet ontstaan in de machine.

In machines bestaat er altijd een onbalans van de as, daar het massamiddelpunt niet samenvalt met het rotatiepunt. De afstand van het massamiddelpunt tot het rotatiemiddelpunt is gelijk aan de excentriciteit e . De grootte van de onbalans stelt men voor door $m \cdot e$, waarbij m een massa is op een afstand e van de aslijn. Bij het roteren van de as op de draaisnelheid ω , wordt er een centrifugaalkracht opgewekt, die gelijk is aan:

$$F = m e \omega^2 e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

Laat M de totale massa van de machine voorstellen (m is er dus inbegrepen, doch is vaak verwaarloosbaar t.o.v. M !).

We onderstellen dat de beweging slechts in 1 richting plaats heeft; bv. de x -richting.

De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$M \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + kx = m e \omega^2 \cdot e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

oplossing: (permanente beweging)

$$x = X \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Substitutie levert:

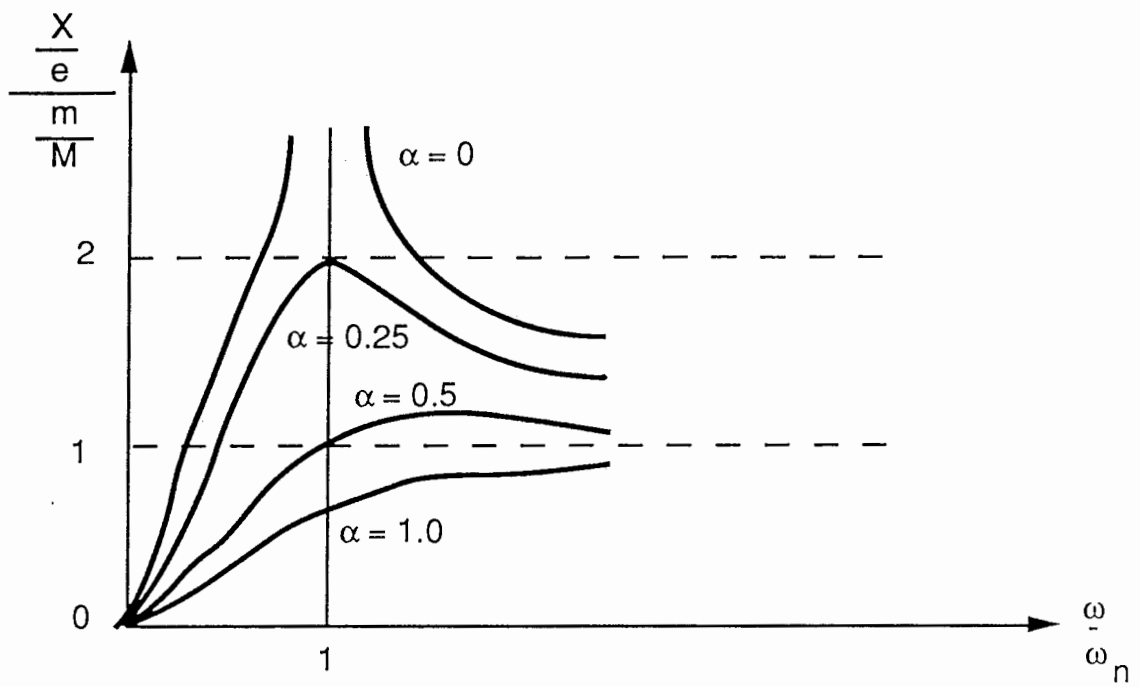
$$(-M\omega^2 + ib \cdot \omega + k) \cdot X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = m e \omega^2 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\text{waaruit: modulus } X = \frac{m e \omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\text{argument } \phi = \text{bgtg} \left(\frac{b\omega}{(k - M\omega^2)} \right)$$

We voeren weer dimensieloze grootheden in:

$$\frac{b\omega}{k} = 2\alpha \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad 2\alpha = \frac{b}{\sqrt{kM}}$$



figuur 2.4 : evolutie van de transfertfunctie in functie van ω / ω_n
in het geval van centrifugaalkracht

$$\frac{M}{k} \omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

$$\frac{m}{k} e \omega^2 = \frac{m}{M} e \frac{M}{k} \omega^2 = \frac{m}{M} e \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 .$$

Daaruit :

$$\frac{MX}{me} = \frac{\frac{X}{e}}{\frac{m}{M}} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}} \quad (2.9)$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{2\alpha \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

We kunnen dus weer krommen tekenen die de betrekking voorstellen tussen de dimensieloze grootheden.

We zien dat in dit geval de kromme vertrekt van de oorsprong, hetgeen logisch is want bij rotatiesnelheid nul is centrifugaalkracht ook nul. Zodra ω in de buurt komt van ω_n treedt resonantie op.

Grafisch is dit voorgesteld in **figuur 2.4**.

$$\frac{\frac{X}{e}}{\frac{m}{M}} = \frac{MX}{me} = \frac{\text{gevolg}}{\text{oorzaak}} \rightarrow \text{Goede uitbalancing (me klein) is belangrijk in elk geval.}$$

De faze krommen zijn dezelfde als in het geval van een harmonische kracht.

We merken op, dat bij een frekwentie die voldoende groter is dan de eigenfrekwentie.

$$\frac{\frac{X}{e}}{\frac{m}{M}} \rightarrow 1 \text{ d.w.z. } X = e \cdot \frac{m}{M}$$

Hoe kleiner me hoe kleiner X en de fazehoek $\phi \rightarrow 180^\circ$. De uitwijking X van het zwaartepunt is in faze - oppositie met de excentriciteit e.

Indien het systeem zichzelf exciteert (bv. draaiende as met onbalans) is $M = m$. De uitwijking x wordt dan gelijk aan $-e$ (faze oppositie) en het systeem balanceert zichzelf uit (zie Module Buigingskritische snelheden van draaiende assen).

2.1.2 Excitatie door beweging van veer, massa en demper

2.1.2.1 Excitatie via de veer

Beweging : $x_0 = X_0 \cos \omega t$ aan het uiteinde van de veer.

Bewegingsvergelijking :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b(\dot{x})$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_0 = kX_0 \cos \omega t$$

2.1.2.2 Excitatie via de dashpot of via een dashpotsysteem

Bewegingsvergelijking :

$$m\ddot{x} = -b(\dot{x} - \dot{x}_0) - kx$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{x}_0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -bX_0 \omega \sin \omega t$$

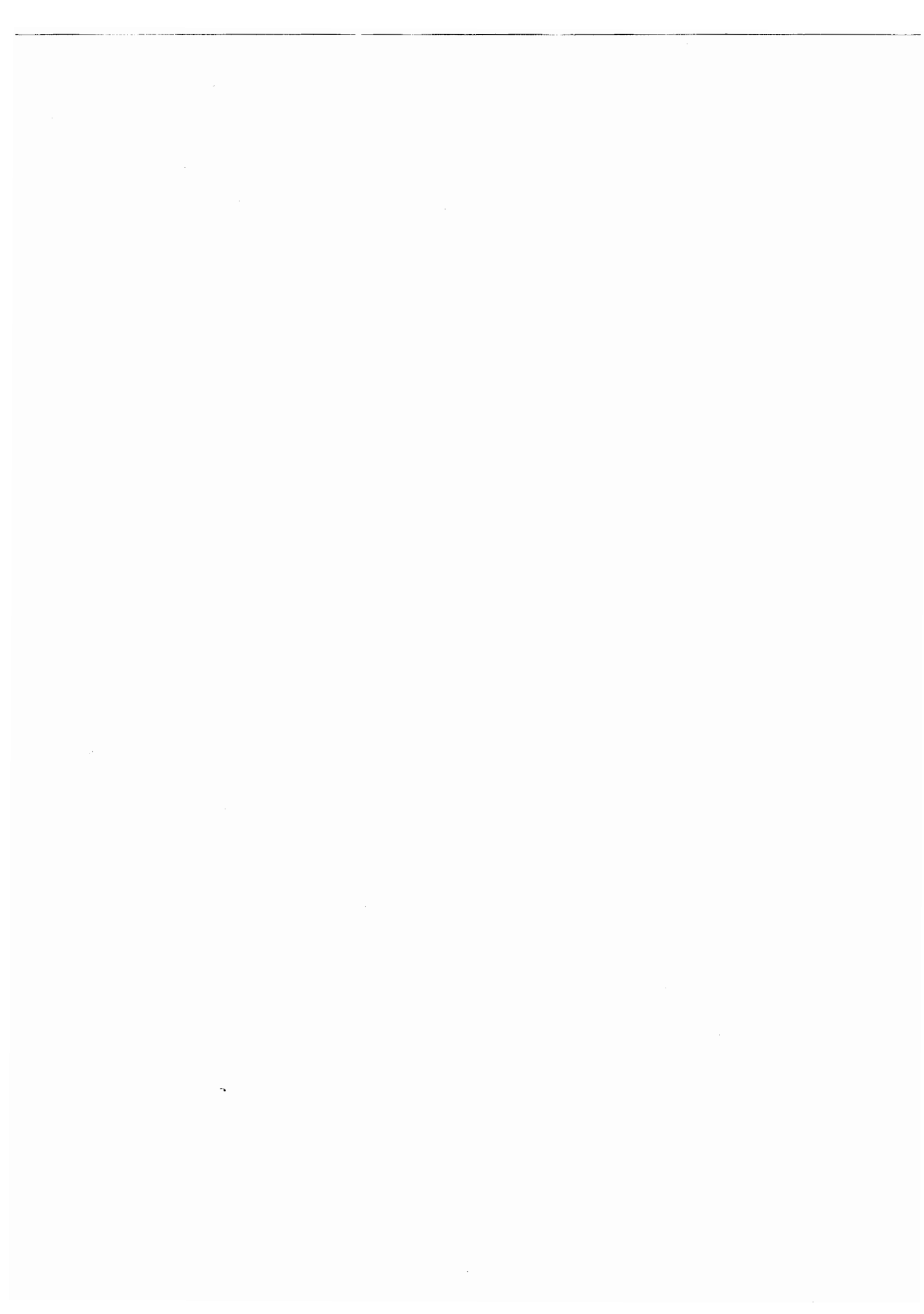
2.1.2.3 Excitatie door traagheidskracht

Bewegingsvergelijking :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b(\dot{x} - \dot{x}_0)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{x}_0 + kx_0 = -m\ddot{x}_0$$

$$= -bX_0 \omega \sin \omega t + kX_0 \cos \omega t$$



2.2 Gedempte, gedwongen trilling onder invloed van een algemene periodische excitatie.

De krachten die in machines optreden hebben dikwijls een algemeen periodisch karakter, dit is het geval bij roterende machines zoals verbrandingsmotoren en zuigercompressoren.

In een dergelijk geval geldt dus voor de excitatiekracht :

$$F(t) = F(t + T)$$

als $T =$ periode. (2.10)

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

Een periodische kracht kan steeds ontbonden worden in een Fourrierreeks. Fysisch komt dit erop neer dat de kracht voorgesteld wordt in het frekwentiedomein. In de praktijk bestaan er Fourieranalysers, waarmee onmiddellijk het frekwentiespectrum van een kracht of verplaatsing bepaald kan worden. Daarenboven bestaat er een verband tussen de frekwentie van een trilling en de onderliggende oorzaak (zie [1]).

Wij herinneren eraan dat :

$$\frac{a_0}{2} = \text{gemiddelde waarde} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ fundamentele of grondfrekwentie}$$

$n \omega =$ frekwentie van de n -de harmoniek

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n \omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n \omega t dt$$

Laat een periodische kracht $F(t)$ aangrijpen op een machine, voorgesteld door gedempt systeem met één graad van vrijheid, dan is de bewegingsvergelijking :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \quad (2.11)$$

De responsie wordt, aangezien de bewegingsvergelijking lineair is, gegeven door :

$$x = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n \omega t - \Phi_n) + b_n \sin(n \omega t - \Phi_n)}{k \sqrt{\left(1 - \frac{n^2 \omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \alpha \frac{n \omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

(2.12)

$$\text{met } \Phi_n = \text{bgtg} \frac{2\alpha \frac{n\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \cdot$$

Maakt men gebruik van de exponentiële schrijfwijze, dan ziet men duidelijk het verband met het frekwentiespectrum. Deze methode is algemeen toepasselijk op elk lineair systeem.

Laten we twee termen uit de Fourierreeks van de excitatiekracht beschouwen, die samen de n-de harmoniek voorstellen :

$$\begin{aligned} \text{n-de harmoniek} &= a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t \\ &= c_n \cos (n \omega t - \theta_n) \end{aligned}$$

$$\text{met } c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

$$\theta_n = \text{bgtg} \frac{b_n}{a_n}$$

m.a.w. bij de frekwentie $n\omega$ is het excitatieamplitude c_n en de fazehoek θ_n ; terwijl

voor de constante term van de Fourierreeks geldt : $n = 0$; $c_n = \frac{a_0}{2}$; $\theta_n = 0$.

De periodische excitatie kan ook voorgesteld worden door een Fourierreeks in exponentiële vorm :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i(n\omega t - \theta_n)} \quad (2.13)$$

Men kan dit grafisch voorstellen :

$c_n(n\omega)$: amplitude spectrum

$\theta_n(n\omega)$: faze spectrum.

De bewegingsvergelijking wordt nu geschreven onder de vorm :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i(n\omega t - \theta_n)}$$

Komen we terug op hetzelfde systeem met enkelvoudig harmonische excitatie, zoals hogerop gezien :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$x = X e^{i(\omega t - \Phi)}$$

$$(-m\omega^2 + ib\omega + k) X e^{-i\Phi} = F_0$$

$$\frac{X}{F_0} e^{-i\Phi} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ib\omega} \Rightarrow$$

$$\frac{X}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (2.14)$$

$$\Phi = \text{bgtg} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

Deze uitdrukking wordt de harmonische transfertfunctie van het systeem genoemd, en beschrijft het dynamisch gedrag van het systeem voor een eenheidsexcitatie (met fase gelijk aan nul) in functie van de systeemparemeters en de frekwentie.

Voor een willekeurige term van de n^{de} orde uit de Fourierreeks van de excitatie wordt dit :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c_n e^{i(n\omega t - \theta_n)} \quad (\text{bewegingsvergelijking}) \quad (2.15)$$

$$x_n = X_n e^{i(n\omega t - \theta_n - \Phi_n)} \quad (\text{oplossing})$$

$$\frac{X_n}{c_n} e^{-i\Phi_n} = \frac{1}{(k - m n^2 \omega^2) + i b n \omega}$$

We merken op dat in dit geval de systeemresponsie gegeven wordt door dezelfde harmonische transfertfunctie als in het geval van de enkelvoudige harmonische excitatie met als enig verschil dat ω vervangen werd door $n \omega$.

Men bekomt :

$$\begin{aligned} \text{amplitude : } \frac{X_n}{c_n} &= \frac{1}{\sqrt{(k - m n^2 \omega^2)^2 + (b n \omega)^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2 \omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\alpha \frac{n\omega}{\omega_n}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{faze : } \Phi_n = \text{bgtg} \frac{bn\omega}{k - mn^2\omega^2} = \text{bgtg} \frac{2\alpha \frac{n\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega_n^2}{n^2\omega^2}}$$

Indien dus alle individuele excitaties (voor de diverse termen van de Fourierreeks) gesuperponeerd worden, hetgeen toegelaten is voor een lineair systeem, dan wordt de totale responsie voor de algemene periodische excitatie gegeven door de som van de individuele responsies :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{c_n}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_n^2}{n^2\omega^2}\right)^2 + \left(2\alpha \frac{n\omega}{\omega_n}\right)^2}} e^{i(n\omega t - \theta_n - \Phi_n)} \quad (2.17)$$

Besluit :

Het Fourierspectrum van de responsie, zowel voor amplitude als voor faze, kan geconstrueerd worden uitgaande van het Fourierspectrum van het excitatiesignaal $F(t)$ en de amplitude en faze van de systeemtransferfunctie. (produkt van de amplitudes en algebraïsche som van de fazen).

2.3. Arbeid verricht door de excitatiebron.

De excitatiebron is dat deel van het systeem dat de kracht $F \sin \omega t$ uitoefent op massa m .

$F \sin \omega t$ is de excitatiekracht,

$x = X \sin (\omega t - \Phi)$ is de verplaatsing van het aangrijpingspunt, als gevolg van de excitatiebron.

Hieruit kunnen we de arbeid voor 1 periode als volgt berekenen :

$$A = \int_0^T F \dot{x} dt$$

$$A = FX \int_0^{2\pi} \cos (\omega t - \phi) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= FX \sin \phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \pi FX \sin \phi .$$

Het gemiddeld vermogen dat geleverd wordt, bedraagt :

$$W = \frac{A}{T} = \frac{FX \omega \sin \phi}{2} \quad \text{als } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Deze wordt dus maximaal als $\phi = \frac{\pi}{2}$ d.w.z. bij fazeresonantie.

Deze arbeid wordt gedissipeerd door wrijving. Dit is logisch daar dit de enige dissipatieve term is. Inderdaad, berekenen we de arbeid geleverd om de viskeuze wrijving te overwinnen :

$$\int_0^T b (\dot{x})^2 dt$$

als $x = X \sin (\omega t - \phi)$

$$\dot{x} = \omega X \cos (\omega t - \phi)$$

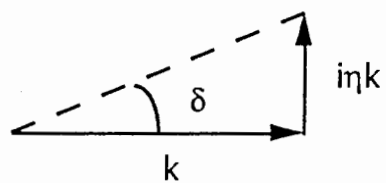
$$\text{dan is } \int_0^{2\pi} b\omega X^2 \cos^2 (\omega t - \phi) d(\omega t) = \pi b\omega X^2 .$$

Op het vektordiagram (**Figuur 2.2**) zien we dat :

$$A = \pi FX \sin \phi = \pi b\omega X^2, \quad (2.18)$$

Konkluderend, kan men stellen dat de arbeid die de excitatiebron levert, dient om de viskeuze wrijving te overwinnen, en deze wordt de uiteindelijk onder de vorm van warmte overgedragen aan de omgeving.

Merken we hierbij ook op dat er meer energie nodig is om een structuur of machine op een hogere frekwentie (of mode) te doen trillen, zoals duidelijk zichtbaar is in vgl. (2.18) . Dit betekent ook dat de demping toeneemt met stijgende frekwenties.



figuur 2.5 : bepaling van de verliesfaktor bij ekwivalente demping

2.4. Ekwivalente viskeuze demping .

Indien de demping niet lineair is, d.w.z. niet van het viskeuze type, dan zal de bewegingsvergelijking niet lineair zijn, en zal bij harmonische excitatie de beweging niet harmonisch zijn. Wij zullen dan de gegeven niet lineaire demping door een ekwivalente viskeuze demping vervangen door aan te nemen dat evenveel energie in beide gevallen gedissipeerd wordt. We maken wel de onderstelling dat de beweging bij benadering harmonisch is. Dit is toegelaten, indien de demping voldoende zwak is. In sommige gevallen zal de niet-viskeuze demping echter wèl lineair zijn.

Voorbeeld : er treedt hysteresische demping op. Deze dempingskracht is in fase met de snelheid doch evenredig met de relatieve verplaatsing over de demper gemeten.

Bewegingsvergelijking :

$$m \ddot{x} + ihx + kx = F e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = F e^{i\omega t}$$

Men noemt : $k(1 + i\eta)$: complexe stijfheidscoëfficiënt

$$\eta = \frac{h}{k} \text{ verliescoëfficiënt, verliesfaktor.}$$

Vergelijken we met de lineaire bewegingsvergelijking, dan vinden we : ihx i.p.v. $i\omega bx$ dus de ekwivalente viskeuze dempingscoëfficiënt is :

$$b_{eq} = \frac{h}{\omega}$$

en dus omgekeerd evenredig met de frekwentie.

Brengen we deze uitdrukking in deze van de gedissipeerde energie :

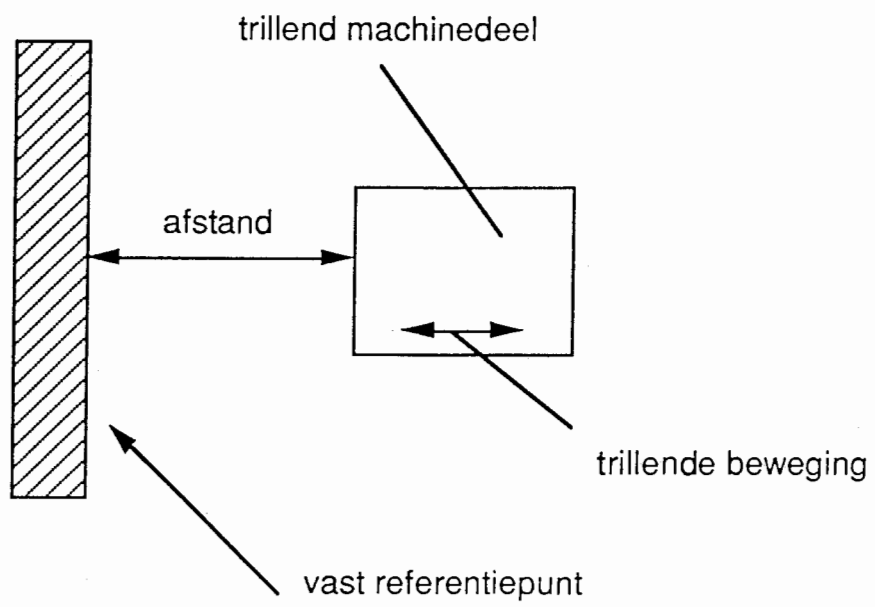
$$A = \pi b_{eq} \cdot \omega X_0^2 = \pi h X_0^2$$

Dan merken we op dat deze energie onafhankelijk van de frekwentie is. De afhankelijkheid van de trillingsamplitude is in theorie kwadratisch, doch zal in de praktijk tot een exponent tussen 2 en 3 aanleiding geven, afhankelijk van het dempend materiaal. Men kan ook voor een dergelijk materiaal een complexe elasticiteitsmodulus definiëren : $E(1 + i\eta)$ aangezien $k \sim E$.

Hierin is :

E : de gebruikelijke elasticiteitsmodulus.

$$\text{tg } \delta = \frac{\eta k}{k} = \eta = \text{verliesfaktor (figuur 2.5).}$$



figuur 3.1 : meting van de trilling van een machine

3. De meting van mechanische trillingen

3.1 Inleiding

We wensen de mechanische trillingen van een machine, machineonderdeel, gebouw of brug te meten.

Dit gebeurt met een trillingsopnemer. Met meten wordt bedoeld, dat we de verandering van de afstand tot een referentiepunt wensen te meten in functie van de tijd. Eigenlijk meten we dus een relatieve beweging. **(Figuur 3.1)**

Doch er heeft zich een spraakgebruik ingesteld, zodanig dat men twee soorten van trillingsopnemers onderscheiden kan :

- trillingsopnemers voor relatieve bewegingen : de twee delen van de opnemer worden gekoppeld met de punten waartussen de relatieve beweging moet gemeten worden.
- trillingsopnemers voor absolute bewegingen : het referentiepunt wordt veelal verkregen door een massa verend op te stellen ten opzichte van het voorwerp waarvan de trillingen gemeten worden. Onder zekere voorwaarden zal deze massa een vast referentiepunt vormen.

In de moderne trillingsmeettechniek wordt uitsluitend gebruik gemaakt van elektrische sensoren, d.w.z. de trilling veroorzaakt een variatie van één of andere elektrische parameter (inductie, capaciteit, weerstand, elektrische lading, enz ...). Deze laatste geeft aanleiding tot een variatie van een elektrische stroom of spanning, die dan gemeten of geregistreerd wordt en in feite een maat is voor de bewegingsparameter waar het oorspronkelijk om ging. Vanzelfsprekend eist men een lineair verband tussen de twee.

3.2. Gemeten grootheden

3.2.1 Enkelvoudig harmonisch signaal $x = X \sin(\omega t + \phi)$ wordt volledig beschreven door de grootheden:

max. amplitude X

hoekfrequentie ω of frequentie $f = \frac{\omega}{2\pi}$

phasehoek ϕ

Deze moeten dus gemeten worden.

Dit eenvoudig signaal heeft een grote fundamentele betekenis doch komt in de praktijk zelden alleen voor, d.w.z. er zijn harmonieken (deze hebben als frequentie $k\omega$ met $k = 2, 3, \dots$).

3.2.2 Periodisch signaal $x(t)$

Hier meet men bepaalde grootheden die verband houden met de amplitude :

a) gemiddelde waarde :

$$x_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (3.1)$$

b) effectieve waarde (RMS) :

$$x_{\text{eff}} = x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t))^2 dt} \quad (3.2)$$

$$x_{\text{max}} = X$$

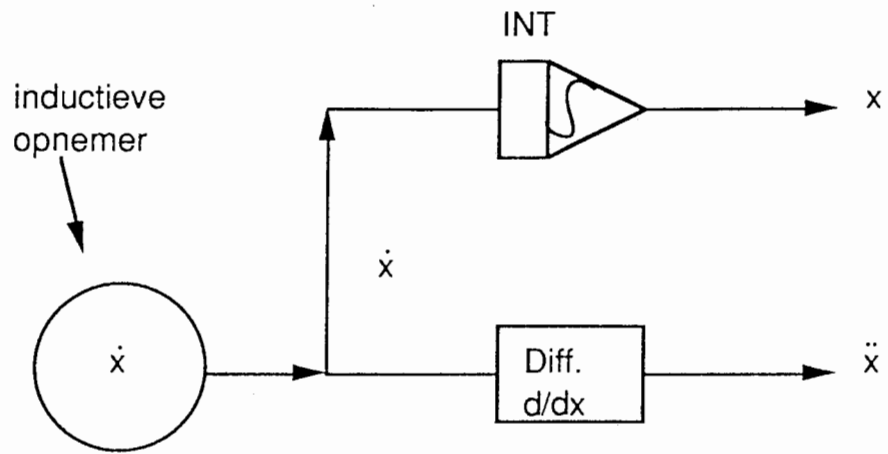
Dit is de maximale waarde die voorkomt.

Passen we deze begrippen toe op de eenvoudige harmonische trilling :

$$x(t) = X \cdot \sin \omega t \rightarrow x_{\text{max}} = X$$

$$x_{\text{gem}} = \frac{2}{\pi} \cdot X = 0.64 X$$

$$x_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X = 0.71 X$$



figuur 3.2 : meting van x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$

De constructeur van meetinstrumenten kan dus naar keuze een uitlezing geven uitgedrukt in gemiddelde, effectieve of maximale waarde. Doch dit geldt enkel voor het geval dat men een zuiver sinusoidaal signaal meet.

Bij de meting van periodische trillingen kunnen er grote verschillen zijn tussen die signalen.

Voor de meting van periodisch samengesteld signaal gaat men over tot frekwentieanalyse van het signaal :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \sin(n\omega t - \phi_n)$$

Te meten grootheden : x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$. (Figuur 3.2)

Een bepaalde trillingsopnemer is slechts geschikt om één dezer grootheden te meten. Wenst men een andere grootheid te kennen dan moet men een integrator of een differentiator inschakelen, naargelang het geval.

3.3 Trillingsopnemers : (elektrische sensoren).

3.3.1 Resistieve trillingsopnemer : rekstrookje.

Wordt een weerstandsdraad op trek belast, dan volgt de weerstand de wet van Pouillet : $R = \rho \cdot l / S$. Er heeft plaats :

- een lengteverandering
- een doorsnedeverkleining
- een vergroting van ρ doordat atomen een andere plaats innemen t.o.v. elkaar.

$$\text{Men krijgt : } \frac{\Delta R}{R} = K \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

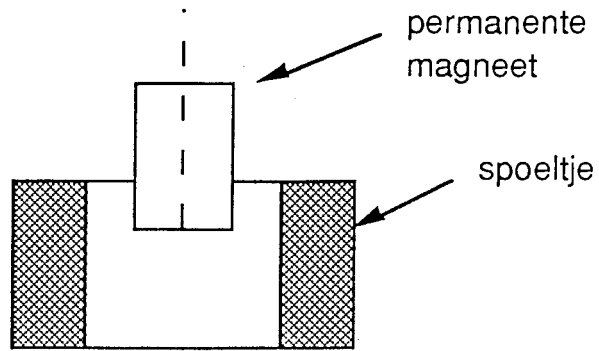
als betrekking tussen de relatieve weerstandsverandering en de relatieve lengteverandering.

Gevoeligheidsfactor : $K \approx 2.1$ voor constantaandraad, 100 voor halfgeleiders.

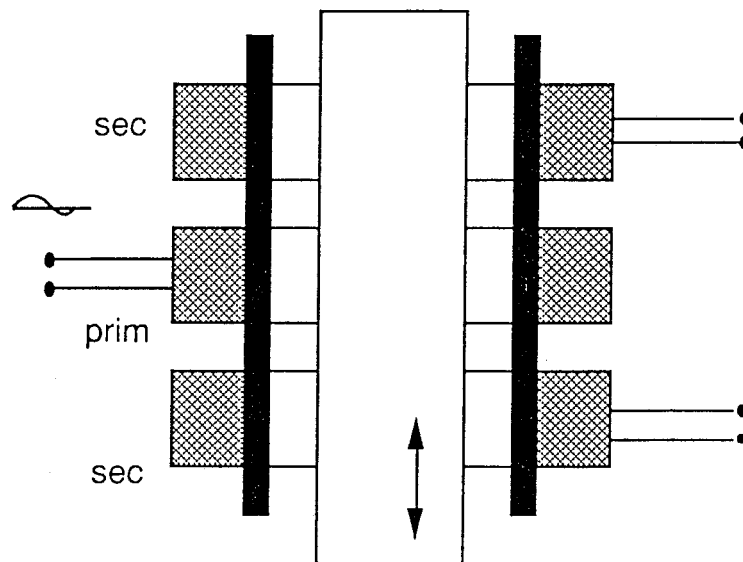
Men lijmt het rekstrookje op een onderdeel dat een vervorming ondergaat onder invloed van de trillingen.

Het rekstrookje is opgenomen in een brug van Wheatstone of een potentiometrische brug.

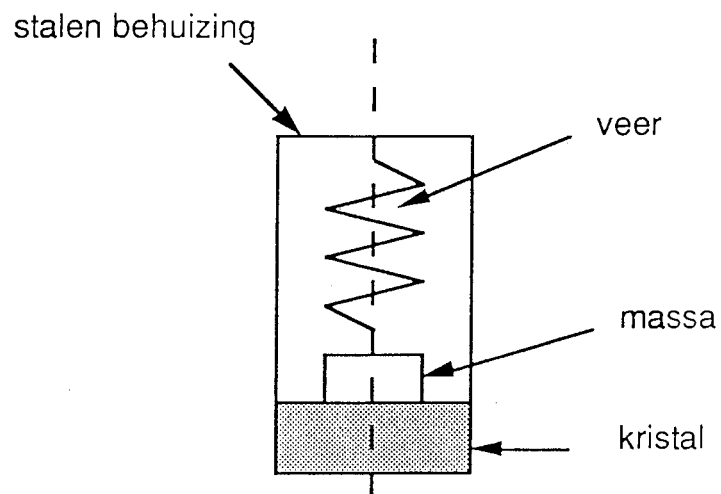
Deze opnemer is dus een verplaatsingsopnemer want $\Delta R \sim \Delta l$ en Δl is evenredig met de amplitude van de trilling.



figuur 3.3 : principeschema van een inductieve opnemer kern



figuur 3.4 : principeschema LVDT



figuur 3.5 : principeschema piezo-elektrische opnemer

3.3.2 Capacitieve opnemer.

De twee elektroden, die samen met de lucht als dielektricum een condensator vormen, ondergaan een verplaatsing t.o.v. elkaar indien ze vast gehecht zijn aan de twee voorwerpen, wiens relatieve verplaatsing men wenst te meten. De capaciteit ondergaat een variatie omgekeerd evenredig met de afstand : er is een niet lineair verband tussen capaciteit en afstand.

Deze condensator maakt deel uit van een elektronisch circuit dat uiteindelijk de spanning geeft evenredig met de verplaatsing, door omkering van het signaal.

Door twee maal te differentiëren vindt men uiteindelijk de snelheid en de versnelling. Deze verplaatsingsopnemer is zeer geschikt om de beweging van een draaiende as te meten.

3.3.3 Inductieve opnemers . (Figuur 3.3)

Deze opnemer bestaat uit een spoeltje en een permanente magneet. De relatieve snelheid van het spoeltje t.o.v. de magneet veroorzaakt een spanning (wet van Lenz) :

$$EMK = - \frac{d\phi}{dt}$$

Het uitgangssignaal is evenredig met de snelheid van de relatieve beweging van de magneet t.o.v. het spoeltje.

Soms past men ook het transformatieprincipe toe zoals bv. in LVDT (Linear Velocity and Displacement Transducer) (fig. 3.4)

Hier wordt één van de spoeltjes gevoed met hoogfrequent wisselspanning. (primaire) Naarmate de magnetische koppeling tussen de twee circuits stijgt door de kern te verplaatsen, zal de EMK stijgen in de ene zin of de andere. Het uitgangssignaal is evenredig met de verplaatsing van de kern, en is nul wanneer de kern in centrale positie staat.

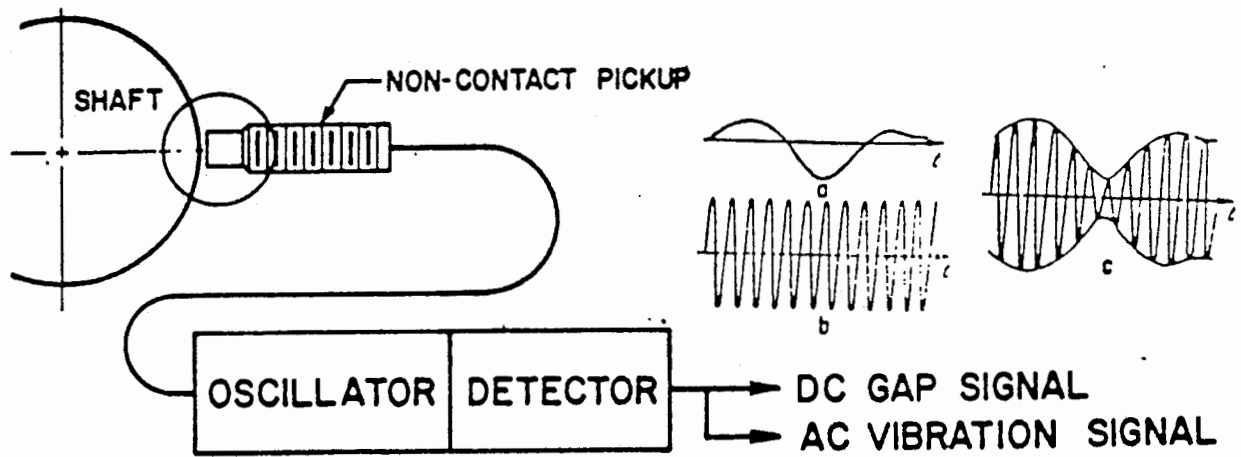
3.3.4 Piezo-elektrische opnemers . (Figuur 3.5)

Het piezo-elektrisch kristal krijgt een oppervlakte-lading wanneer het mechanisch belast wordt. Men gebruikt barium-titanaat of Loodzirconiumtitanaat als drukgevoelig kristal. Kracht wordt veroorzaakt door de versnelling van een massa m die opgehangen is aan een veertje. De kracht uitgeoefend op het kristal is gelijk aan $F = m \ddot{x}$. De door het kristal geproduceerde ladingen zijn een maat voor deze versnelling.

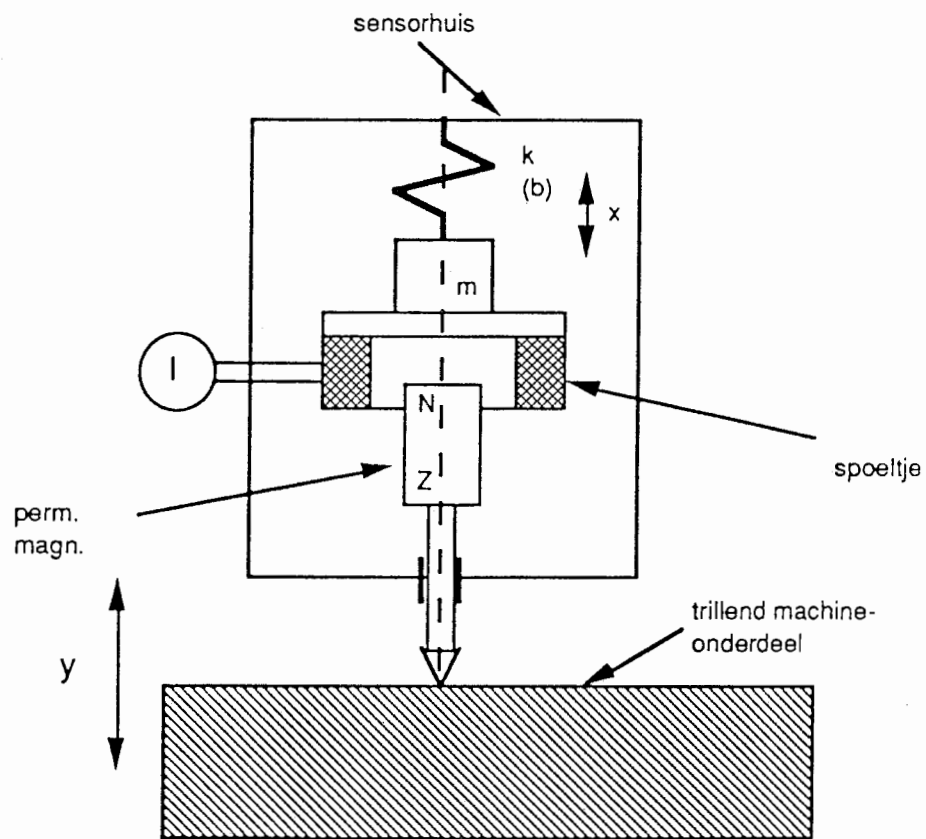
3.3.5 Wervelstroomopnemers (Figuur 3.6)

De relatieve opnemers die veel gebruikt worden zijn kontaktloos en gebaseerd op wervelstromen (Foucaultstromen - Eddy Current). De opnemer is in wezen een wikkeling met een magneetkern. (figuur 3.6). Deze "Self" is in een impedantiebrug geschakeld; die gevoed wordt door een oscillator met een frequentie van enkele honderden kHz. Deze voedingsfrequentie moet veel hoger zijn dan de te bestuderen frequentie.

Wanneer de brug in evenwicht is; verschijnt er geen spanning over de meetdiagonaal in dewelke een demodulatie gemonteerd is.



figuur 3.6 : wervelstroomopnemers



figuur 3.7 : Het bekomen van een vast referentiepunt

De wikkeling wordt doorlopen door een stroom zoals voorgesteld in figuur 3.6. Wanneer een metalen stuk de wikkeling nadert worden in deze laatste wervelstromen geïnduceerd. Deze magnetische verliezen veranderen de impedantie van de wikkeling

Dit veroorzaakt een onevenwicht in de brug en een spanning op oscillatorfrequentie wordt doorgegeven aan de demodulator; die een gelijkspanning produceert die evenredig is met de afstand tussen de wikkeling en het metalen voorwerp.

Indien de kurve a in figuur 3.6 de te bestuderen verplaatsing voorstelt als functie van de tijd, stelt c de gemoduleerde trilling voor (hiervan wordt de hoge voedingsfrequentie draagfrequentie genoemd), kurve a stelt dan opnieuw het uitgangssignaal voor van de demodulator.

Normaal wordt de opnemer op het lager bevestigd. De opnemer meet dan de verplaatsing van de as t.o.v. het lager (relatieve verplaatsing).

Dit systeem laat dus toe "zonder contact" te werken, heeft geen bewegend mechanisch onderdeel en kan tot zeer lage frequenties gaan (met inbegrip van konstante signalen (DC)). Daarenboven laat het toe onmiddellijk de werkelijke verplaatsing van de as ten opzichte van het lager te meten en elimineert zo de invloed van een eventuele demping die de oliefilm tussen lager en as veroorzaakt.

Dit soort opnemers wordt voornamelijk gebruikt bij continue opvolging van belangrijke produktiemachines.

3.4 Kunstmatige manier om een vast referentiepunt te bekomen in een opnemer of sensor .

3.4.1 De opnemer wordt gebruikt als vibrometer

Een massa is elastisch opgehangen in stalen sensorhuis. Een permanente magneet is vast gemonteerd op dit huis. (fig.3.7)

Op de massa m is een spoeltje gemonteerd dat dus dezelfde beweging heeft als de massa.

De opnemer wordt met een punt tegen het trillend mechanisme aangedrukt, en de EMK zal dus evenredig zijn met de snelheid van de relatieve beweging tussen de spoel en de magneet m.a.w. tussen de massa en het trillend machine-onderdeel, aangezien de sensor hier van het inductieve type is.

In plaats van een inductieve sensor kan men echter ook een piëzoelektrisch kristal (drukgevoelige sensor) plaatsen in het hierboven beschreven sensorhuis.

Wij noemen :

y : absolute beweging van het trillend machine-onderdeel (moet gemeten worden.)
We onderstellen perfect contact met sensorhuis.

x : relatieve beweging van de massa m t.o.v. trillend machineonderdeel (is hetgeen in feite gemeten wordt) . Dit is trouwens de beweging (of vervorming) die het sensorelement ondergaat.

De absolute beweging van de massa m : $x + y$

De absolute versnelling van de massa m : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}$

De wrijvingskracht op de massa m : $-b \cdot \frac{dx}{dt}$ (damping in materiaal en lucht).

De veerkracht op de massa m : $-k \cdot x$

(deze twee laatste worden enkel bepaald door de relatieve beweging x).

Bewegingsvergelijking wordt dan:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$$

of :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = -m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

Laat nu : $y = Y \cdot e^{i\omega t}$ (oorzaak) beweging van machine

$x = X \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$ (gevolg) beweging van massa.

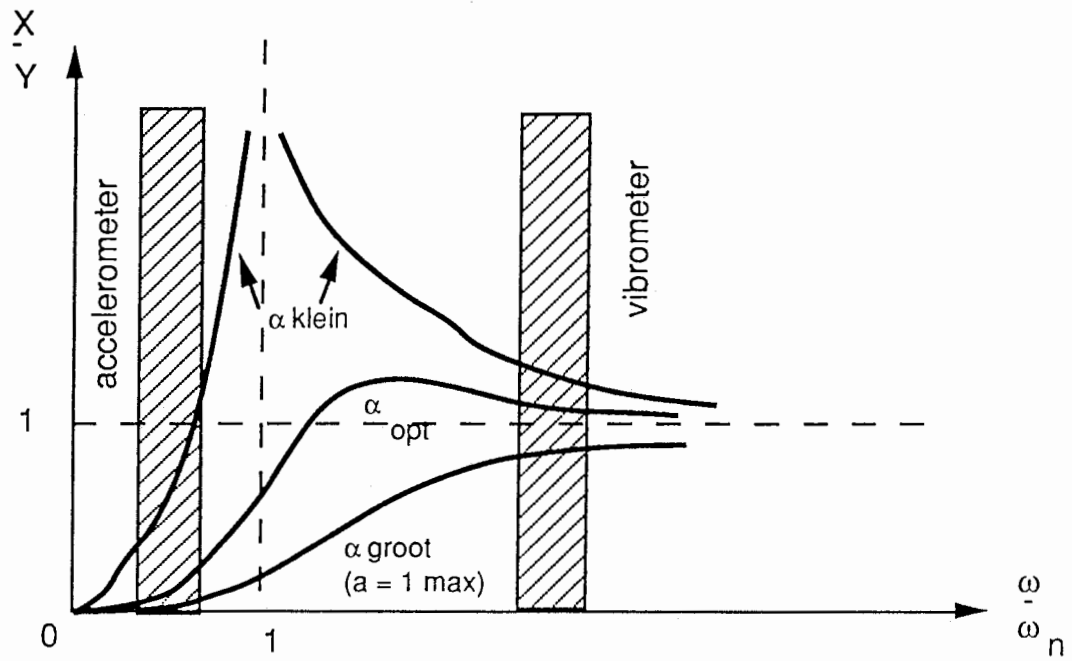
Dan is :

$$(-m \cdot \omega^2 + i b \omega + k) \cdot X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = m \cdot \omega^2 \cdot Y \cdot e^{i\omega t}$$

Waaruit :

$$\frac{X}{Y} e^{-i\phi} = \frac{m \cdot \omega^2}{(k - m \omega^2) + i b \omega} \quad (3.3)$$

of :



figuur 3.8 : als functie van ω / ω_n met aanduiding van het werkingsgebied van vibrometer en accelerometer

$$\text{mod} = \frac{X}{Y} = \frac{m \cdot \omega^2}{\sqrt{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (3.4)$$

$$\text{arg} = \phi = \text{bgtg} \frac{b \cdot \omega}{k - m \cdot \omega^2}$$

Gaan we nu over op dimensieloze grootheden, na deling van teller en noemer door k.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{m}{k} \omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

$$\frac{b}{k} \omega = 2 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Dan hebben we :

$$\frac{X}{Y} = \frac{\left(\omega / \omega_n \right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\omega / \omega_n \right)^2 \right)^2 + \left(2 \cdot \alpha \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (3.5)$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{2 \cdot \alpha \left(\omega / \omega_n \right)}{1 - \left(\omega / \omega_n \right)^2}$$

We zien dat voor (Figuur 3.8)

$$\left. \begin{array}{l} \left(\omega / \omega_n \right) \gg 1 \\ \text{de modulus } \frac{X}{Y} \rightarrow 1, \text{ de faze } \phi \rightarrow 180^\circ \end{array} \right\} \text{ dus } X = -Y.$$

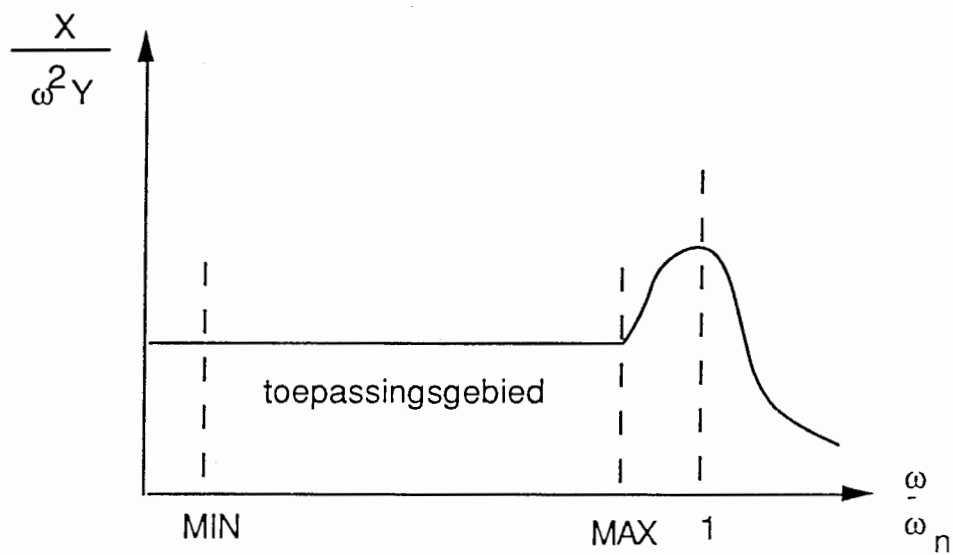
Dit is nu juist wat we wensen voor onze opnemer, nl. dat de relatieve verplaatsing X die gemeten wordt (door het spoeltje in het magneetveld) gelijk en tegengesteld is aan de absolute verplaatsing Y die we wensen te meten.

De massa m staat dan om zo te zeggen stil en kan als referentiepunt genomen worden (want zijn beweging is $x + y$).

We zijn dus nu in staat een trillingsmeter of vibrometer te bouwen, door een sensorelement aan te brengen tussen de stilstaande massa, die als referentiepunt zal dienst doen, en het bewegende huis. Er wordt stilzwijgend ondersteld, dat het

openemerkhuis goed bevestigd is op het trillend oppervlak en dus dat de te meten trilling y correct overgebracht wordt op het sensorelement. Als sensorelement kan men bv. het inductieve type gebruiken, waarbij de permanente magneet bevestigd is in het huis en het spoeltje bevestigd is op de massa.

In dit geval zal de sensor gevoelig zijn voor de snelheid van de trilling x , en een elektrisch signaal afgeven, dat evenredig is met de snelheid van de trilling y , die men wenst te kennen. Deze trillingssensor werkt boven zijn eigenfrequentie. Men zal dus m en k zodanig bepalen, dat de eigenfrequentie veel kleiner is dan de onderste grens van dit frequentiegebied. De demping wordt optimaal gekozen, hetgeen betekent dat men een frequentiegebied wil bestrijken waarvan de onderste grens zo laag mogelijk ligt, doch tegelijkertijd wenst men ook dat de fout op de gemeten amplitude zo beperkt mogelijk blijft. Het frequentiegebied is beperkt langs boven door de elektrische tijdsconstante van het spoeltje.



figuur 3.9 : Gebruik van de seismische opnemer als accelerometer-
bruikbaar frequentiespektrum

3.4.2 De opnemer wordt gebruikt als accelerometer. (Figuur 3.9)

Onderstel dat we metingen wensen te doen in het onderkritische frequentiegebied :

$$\omega < \omega_n .$$

Bovenstaande uitdrukking kunnen we schrijven onder de vorm :

$$\frac{X}{\omega^2 Y} = \frac{1}{\omega_n^2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Aangezien de $\omega_n = \text{cte}$ is voor een gegeven systeem, stelt de uitdrukking in het 2e. lid de bekende resonantiekromme voor, (fig.3.9). Deze toont aan dat voor

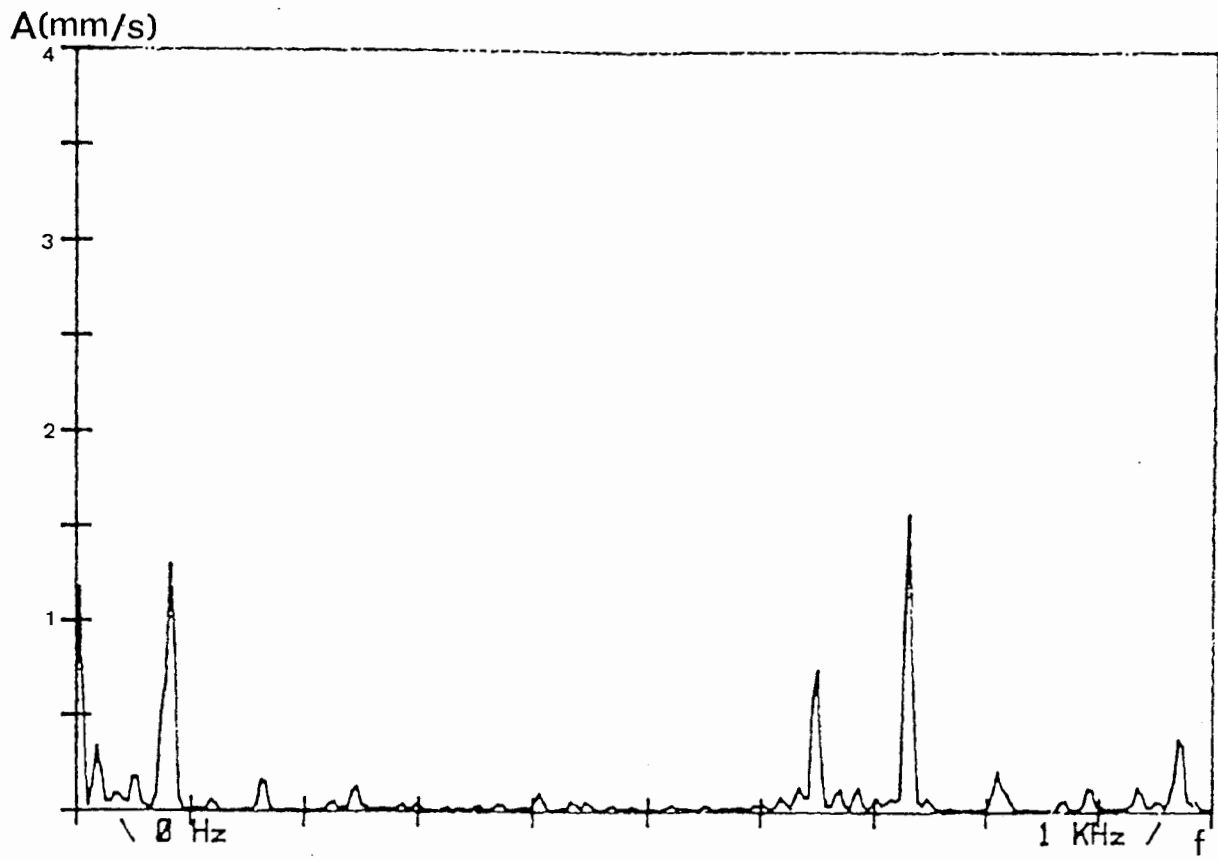
$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$$

de relatieve beweging X evenredig is met de acceleratie $\omega^2 Y$ van de te meten trilling :

$$\frac{X}{\omega^2 Y} \cong \frac{1}{\omega_n^2} .$$

Brengen we nu een piëzoëlectrisch materiaal aan tussen massa en huis, dan zal de vervorming X die het materiaal ondergaat, evenredig zijn met de acceleratie van de trilling ($\omega^2 Y$). Dus het elektrisch signaal (de ontstane elektrische lading aan het oppervlak) zal evenredig zijn met deze acceleratie.

De eigenfrequentie ω_n ligt hoog, (typisch 10 kHz). Het frequentiegebied is beperkt langs onder doordat het kristal bij lage frequenties onbetrouwbare elektrische signalen afgeeft. Het wordt immers beïnvloed door temperatuursinvloeden en lekverliezen, en daardoor is de signaal-ruis verhouding erg slecht.



figuur 3.10 : frekwentiespektrum

3.5. De gebruikte meettoestellen

a) Voltmeters

Deze laat toe om het elektrisch signaal weer te geven als gemiddelde, piek en/of effectieve waarde

b) Frekwentiemeters .

Vaak is het niet nodig om een volledig beeld te krijgen van een trilling. Men neemt in bepaalde gevallen genoeg met de frekwentie alleen.

Bv. één of andere machine trilt erg (is in resonantie) als de machine op een bepaald toerental draait. De kennis van de frekwentie van de trilling en het toerental van de machine helpen bij de opsporing van de oorzaken.

Frekwentiemeters zijn tegenwoordig alle van het elektronisch type en hebben digitale uitlezing.

c) Registratie .

1. Op papierband : met een penschrijver (recorder, enregistreur) geeft amplitude van x , \dot{x} en \ddot{x} , als functie van de tijd.

2. Op oscilloscoop :

- zonder geheugen (goed voor periodisch signaal)
- met geheugen (voor niet-periodische signalen).

3. Op PC of komputer onder digitale vorm.

d) Analyse .

1. Spektrumanalyser :

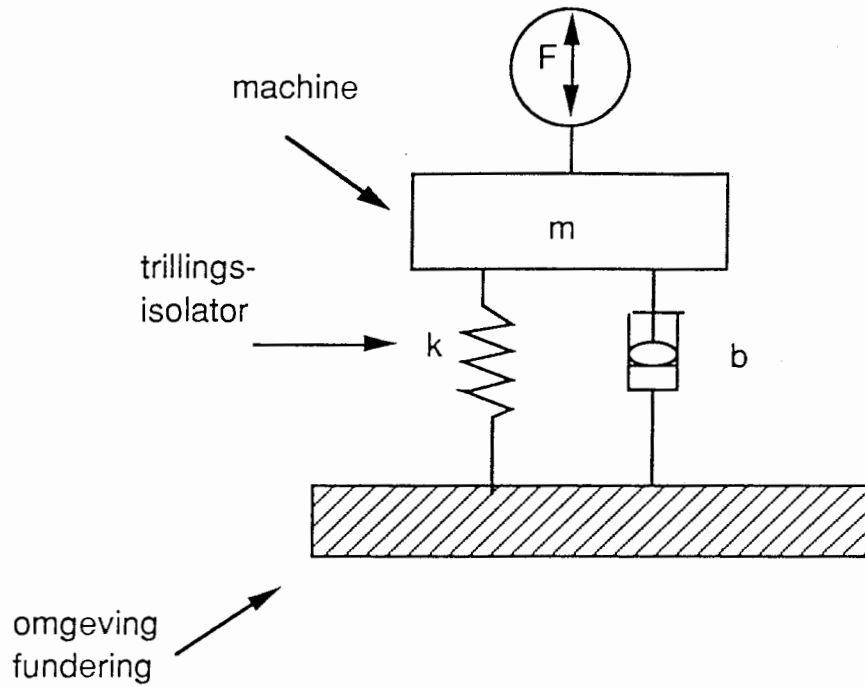
kontinu spektrum (filter met nauwe, doorgaans konstante, doorlaatband) .
(figuur 3.10)

frekwentiebandspektrum(d.w.z. diskrete frekwentiebanden rondom genormaliseerde midden-frekwenties 63, 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000 Hz).

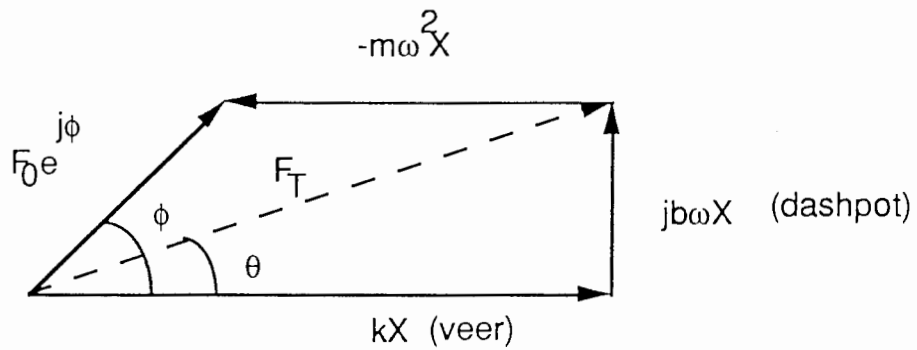
2. Statistische analysatoren.

- histogrammen : bv. tijd (in % uitgedrukt, dat de amplitude binnen een bepaalde categorie valt)
- energie-dichtheidsverdeling : toont aan in welke delen van het frekwentie-spectrum de meeste energie zit.

Een meer gedetailleerd overzicht van de gebruikte meettoestellen en hun mogelijkheden wordt gegeven in [1], [2] en [3].



figuur 4.1 : aanbrengen van een trillingsisolatie bestaande uit veer en demper - principeschema



figuur 4.2 : kracht via de veer en de demper op de omgeving uitgeoefend

4. Problemen in verband met isolatie van een trillende machine

We beperken ons hier tot systemen met 1 vrijheidsgraad

4.1 Kracht door trillende machine uitgeoefend op omgeving (fig. 4.1)

Beschouwen we een machine waar een zekere periodieke kracht $F = F_0 \sin \omega t$ op uitgeoefend wordt. Deze kracht vindt zijn oorsprong in de machine zelf. In vele gevallen zijn de invloeden van die kracht op de omgeving nadelig (trillingen, lawaai, vermoeidheid van personeel, nadelig voor gebouwen of andere machines, apparaten, instrumenten).

Men plaatst de machine op elastische tussenelementen die ook een dempend vermogen bezitten. Dit wordt schematisch weergegeven door b en k (= fundamenteel verschil met vroeger beschouwde gevallen waar b en k toevallig aanwezig waren!). De bewegingsvergelijking van massa m , ondersteund door veerkracht kx , en

dempingskracht $b\dot{x}$ en onderhevig aan uitwendige periodieke kracht F , werd voorheen reeds opgesteld in studie van gedwongen trillingen. We vonden nl. het vektordiagram (fig.4.2) waaruit :

$$F_0 = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2} \cdot X \quad (4.1)$$

De kracht F , die door veer en dashpot van de machine op de omgeving wordt uitgeoefend, m.a.w. overgebracht, is de vektorsom van die 2 voornoemde krachten :

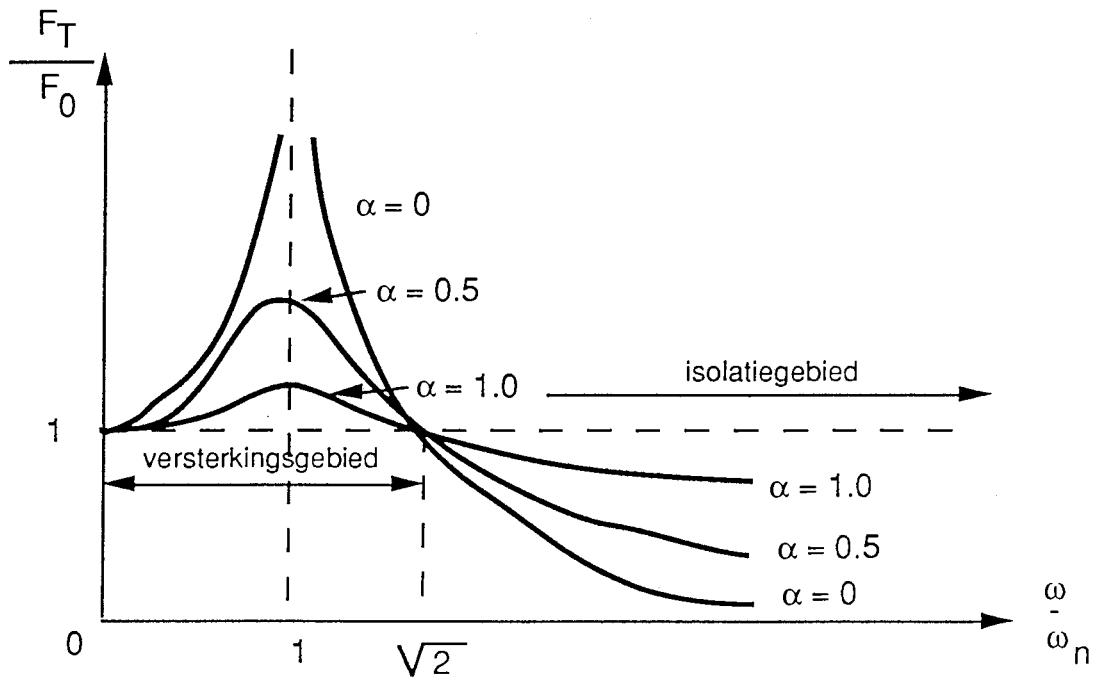
$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (b\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (4.2)$$

$$\text{en } \theta = \text{bgtg} \frac{b\omega}{k}$$

$$\phi = \text{bgtg} \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \quad (4.3)$$

Deze kunnen we uit figuur 4.2 bepalen

Delen we teller en noemer door k en voeren gereduceerde variabelen in :



figuur 4.3 : verloop van F_T / F_0 in functie van ω / ω_n

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{b\omega}{k} = 2\alpha \frac{\omega}{\omega_n} \\ \frac{m\omega^2}{k} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \end{cases}$$

Dan bekomen we :

$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left[2\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad \begin{array}{l} \text{trillingstrans-} \\ \text{missiecoëffi-} \\ \text{ciënt} \end{array} \quad (4.4)$$

$$\Theta = \text{bgtg } 2\alpha \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \quad \begin{array}{l} \text{fazehoek tussen} \\ F_T \text{ en } X \end{array} \quad (4.5)$$

Fazehoek tussen F_T en F_0 : $\phi - \theta$

het geval voorgesteld in Figuur 4.2 is natuurlijk heel slecht, want we zien dat $F_T > F_0$ hetgeen betekent dat de kracht uitgeoefend op de omgeving groter is dan de kracht die op de machine inwerkt. Dit laat zien dat we de waarde van ω_n anders moeten kiezen.

Daartoe tekenen we het diagramma $\frac{F_T}{F_0}$ als functie van $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$. (fig. 4.3)

- Bovenstaande formule laat zien dat $\frac{F_T}{F_0} = 1$ als :

$\frac{\omega}{\omega_n} = 0$
$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$



Dus de hele kurvenschaar moet door deze 2 punten.

- In de buurt van $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ treedt weerom resonantie op.

- Voor $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ zal $\frac{F_T}{F_0} < 1 \rightarrow$ isolatie

- Voor $\frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{2}$ treedt er versterking op.

Praktische conclusies :

Onderstellen we dat de machine aan een snelheid draait zodanig dat $\omega < \omega_n \cdot \sqrt{2}$ dan hebben we er alle voordeel bij een grote waarde van α te kiezen, m.a.w. sterke demping b. (drukt de resonantiepiek naar beneden).

Willen we echter een goede trillingsisolatie hebben, dan moet de resonantie frekwentie ω_n zodanig gekozen worden; dat $\omega > \sqrt{2} \omega_n$ want dan is $\frac{F_T}{F_0} < 1$, en als we

op de koop toe α klein kiezen, zal $\frac{F_T}{F_0}$ nog verder dalen.

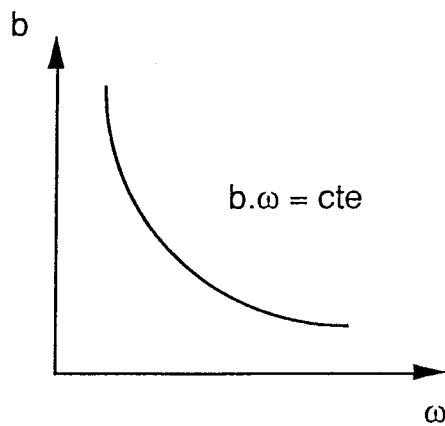
(We komen dus tot een tegenstrijdige conclusie voor wat betreft α).

In het kort : goede trillingsisolatie eist $\omega_n \ll \omega_{\text{bedrijf}}$ en α klein m.a.w. :

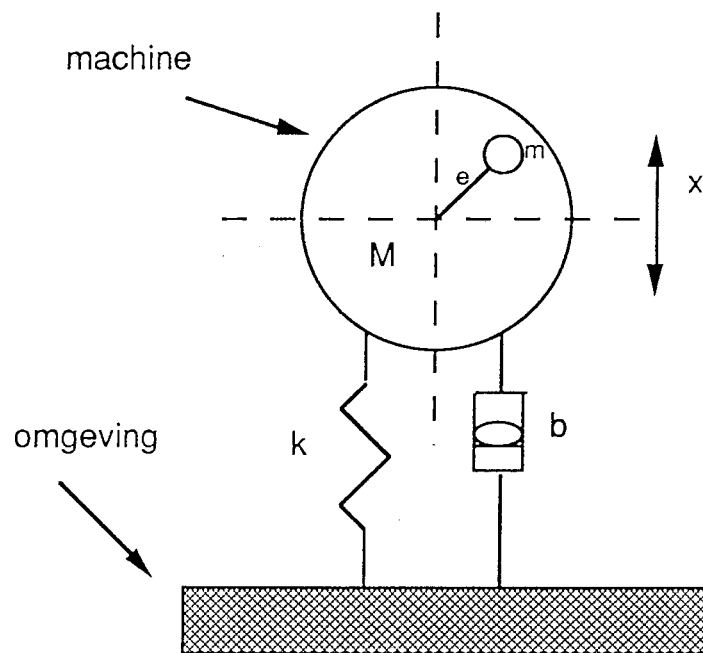
slappe veer en kleine demping. In elk geval moeten we zorgen dat $\omega > \sqrt{2} \omega_n$ willen we dat $F_T < F_0$. Maar daarbij komt kijken, dat de machine in gang moet gezet worden, hetgeen betekent, dat ω van 0 tot het bedrijfstoerental moet stijgen, d.w.z. het resonantiegebied moet doorlopen. We willen dat daarbij de amplitude van de trillingen niet te sterk wordt, dus moet α (dus b) toch voldoende groot gekozen worden, hetgeen weer een nadeel wordt zodra het bedrijfstoerental bereikt wordt !

De goede oplossing zou zijn bereikt indien we over een materiaal konden beschikken dat :

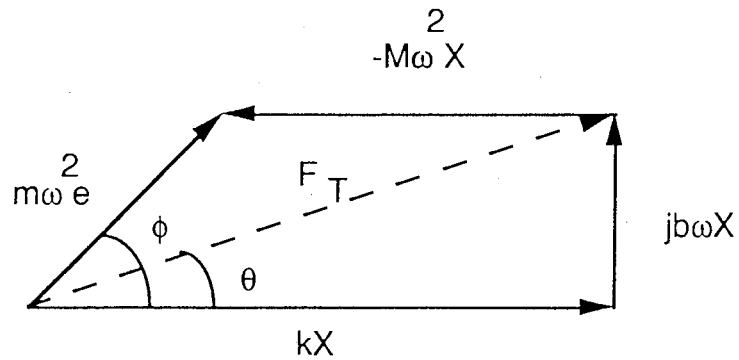
1. aangepaste stijfheid bezit



figuur 4.4 : frekwentiekarakteristiek van rubber en synthetische polymeren



figuur 4.5 : trillingisolatie van een roterende machine met onbalans me



figuur 4.6 : Vektordiagramma van de krachten

2. een demping bezit die omgekeerd evenredig verloopt met de frekwentie, i.p.v. er onafhankelijk van te zijn. Dus b groot voor lage ω , en klein voor hoge ω .

Nu is dit het geval voor rubber en synthetische polymeren, waarvoor $b \cdot \omega \cong \text{constante}$ in een breed frekwentiedomein. (Figuur 4.4)

Voor polymeren vindt men : $b \cdot \omega^{0.94} = \text{cte.}$ (rubber, neopreen, butyl). De waarde van het tweede lid hangt af van materiaal en geometrie.

Enkele waarden :

silentbloc : $\alpha \cong 0,08$
 Stalen constructie : $\alpha = 0,05$ tot $0,08$.

Andere mogelijkheid : massa m kunstmatig vergroten door de machine op een betonnen sokkel te plaatsen en deze laatste elastisch op te stellen. Daardoor zal ω_h zeer laag uitvallen, hetgeen onze wens is.

4.2. Kracht overgebracht op omgeving in geval van een centrifugaalkracht

We onderstellen dat de machine massa M heeft (fig. 4.5). We vonden de volgende bewegingsvergelijking :

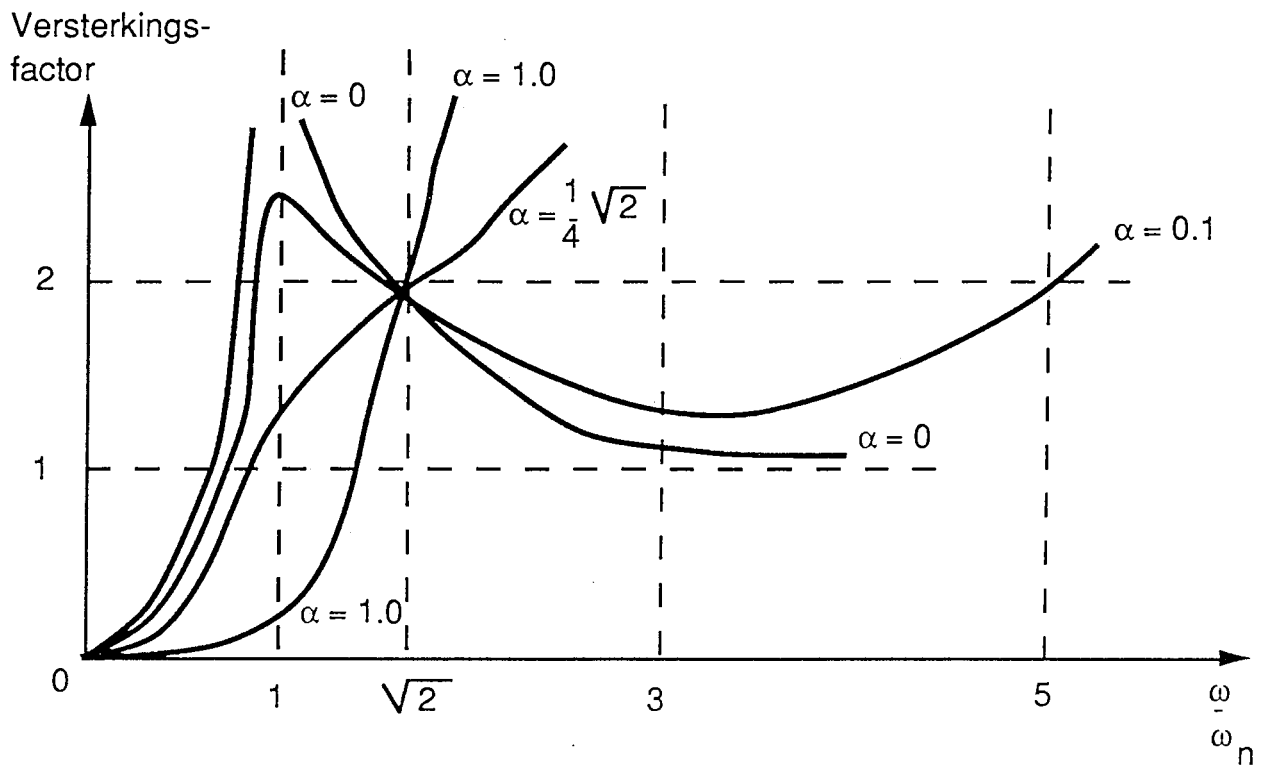
$[-M\omega^2 + ib\omega + k] X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = me\omega^2 \cdot e^{i\omega t}$ wat aanleiding geeft tot het vektordiagram, voorgesteld in Figuur 4.6.

Hieruit volgt :

$$me\omega^2 = \sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (b\omega)^2} \cdot X$$

$$F_T = \sqrt{k^2 + (b\omega)^2} \cdot X$$

$$\frac{F_T}{me\omega^2} = \frac{\sqrt{k^2 + (b\omega)^2}}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$



figuur 4.7 : versterkingsfactor van de trilling als functie van ω / ω_n voor verschillende dempingsgraden

$$\frac{F_T}{m\omega_n^2 e} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{\sqrt{1 + \left(2\alpha \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\alpha \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

met $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$

Alle krommen gaan door 2 vaste punten : (0;0) en ($\sqrt{2}$, 2) (fig. 4.7)

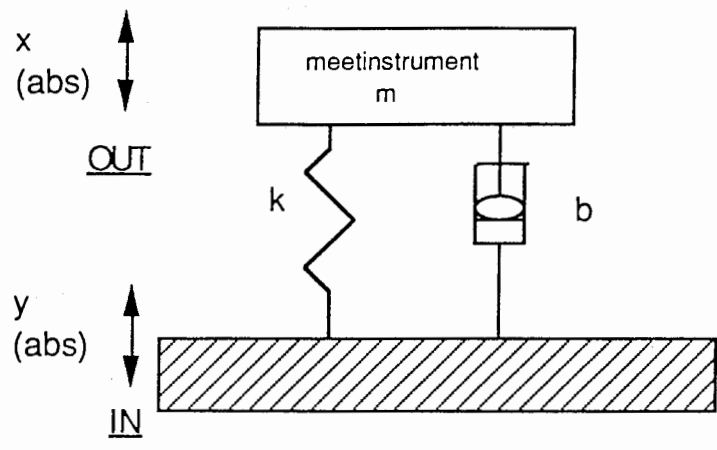
De konklusies zijn net dezelfde als in het voorgaand geval. Inderdaad, voor $\alpha = 0$ is de asymptoot horizontaal. Voor $0 < \alpha < \frac{1}{4} \sqrt{2}$ is de asymptoot stijgend. Verder is er voor $\alpha > \frac{1}{4} \sqrt{2}$ geen minimum meer. Dus het is aangewezen α liefst zo klein mogelijk kiezen. Bovenstaande toont nut van uitbalanceren aan, want de overgebrachte kracht F_T is altijd afhankelijk van de onbalans : $F_T \propto m e \omega^2$.

Er zijn 2 bedrijfsmogelijkheden :

onderkritisch bedrijf : $\omega \ll \omega_n$ (k en b groot kiezen)

bovenkritisch bedrijf : $3 < \frac{\omega}{\omega_n} < 5$ Voor kleine α . (k en b klein)

In de praktijk heeft men niet altijd de keus : indien M klein is en de fundering zeer stijf dan is onderkritisch bedrijf mogelijk. Indien de fundering eerder soepel is, dan kan men niet anders dan bovenkritisch bedrijf aanvaarden en dus de machine op trillingsisolatoren plaatsen.



figuur 4.8 : trillingsisolatie van een meetinstrument

4.3 Isolatie van een massa t.o.v. trillende omgeving (fig. 4.8)

Dit is het omgekeerde geval : de omgeving trilt, en heeft dus een zekere harmonische beweging y , die overgebracht wordt op het lichaam met massa (m) via de veer (k) en de dashpot (b).

Het lichaam zal dan een absolute beweging $x(t)$ ondergaan gegeven door :

$$m\ddot{x} = -b(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$$

(waarin $x - y$ de relatieve beweging voorstelt).

Daaruit :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = b \cdot \frac{dy}{dt} + ky$$

Indien we nu als oplossing stellen :

$$\begin{cases} y = Y \cdot e^{i\omega t} & \text{(oorzaak)} \\ x = X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} & \text{(gevolg) ijlt na : } -\phi \end{cases}$$

dan levert substitutie ons :

$$[-m\omega^2 + ib\omega + k] \cdot X \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = [ib\omega + k] \cdot Y \cdot e^{i\omega t}$$

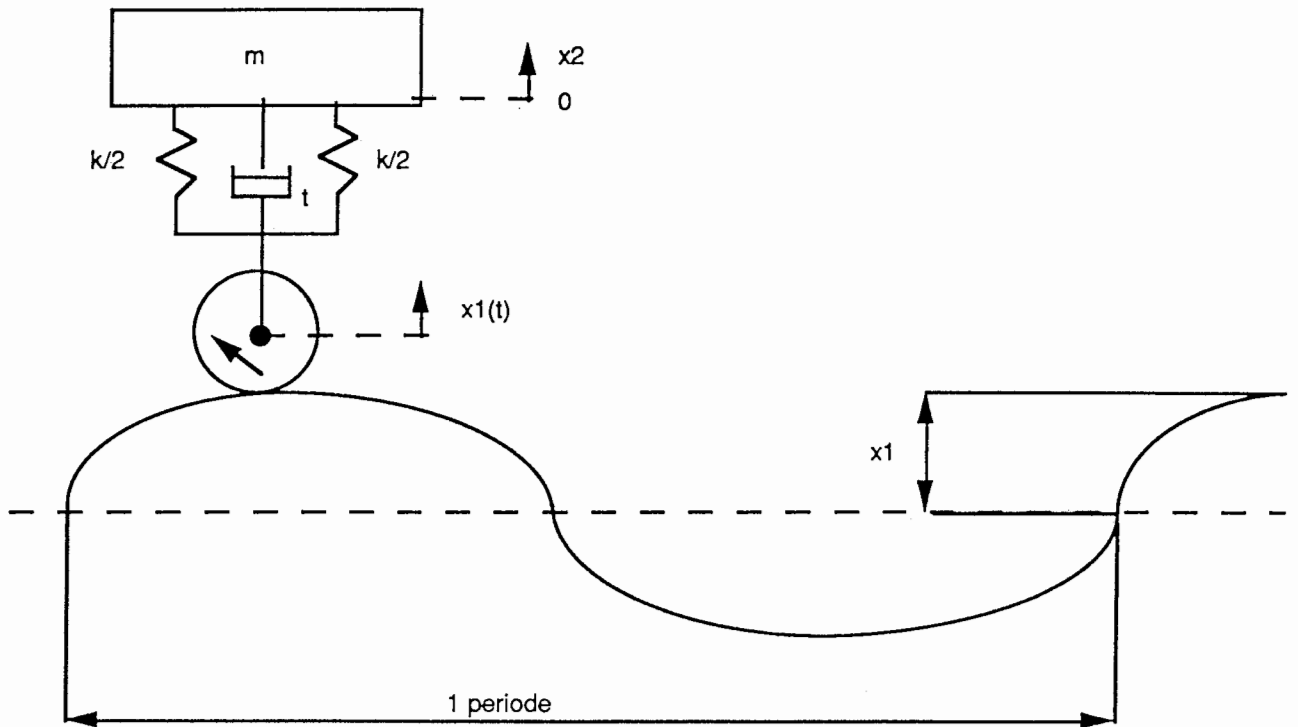
waaruit :

$$\frac{X}{Y} \cdot e^{-i\phi} = \frac{k + ib\omega}{(k - m\omega^2) + ib\omega}$$

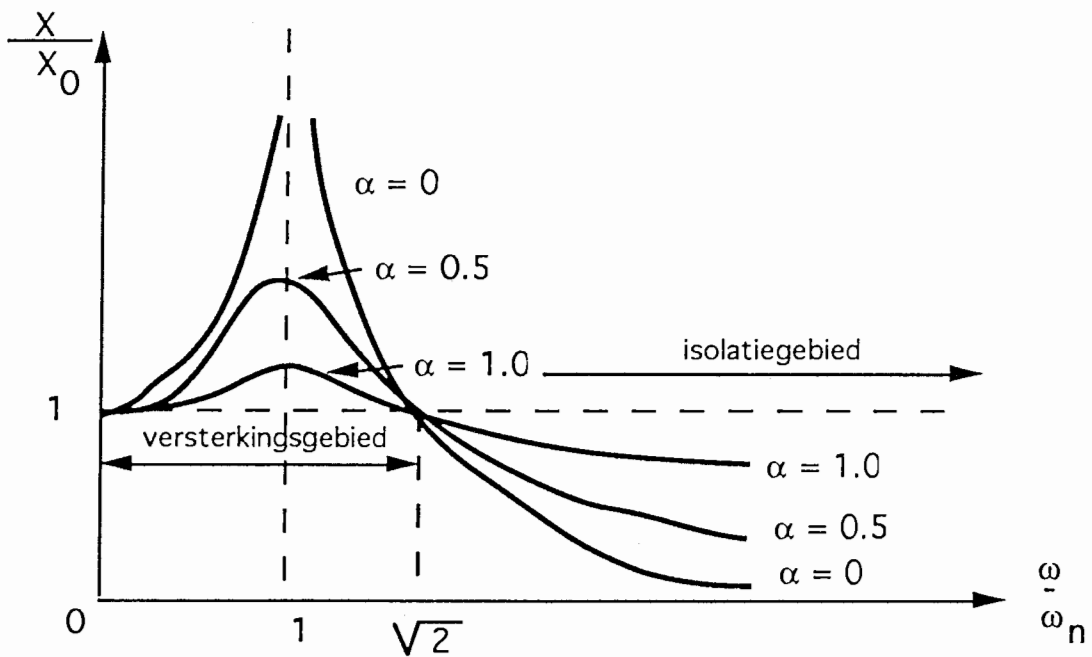
$$\text{modulus : } \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{k^2 + (b\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\alpha \frac{\omega}{\omega_n})^2}}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\alpha \frac{\omega}{\omega_n}]^2}}$$

We vinden juist dezelfde formule terug als in het eerste geval - de conclusies zijn bijgevolg identiek :

voor goede isolatie moet $\omega_n \ll \omega$; d.w.z. moet $\sqrt{\frac{k}{m}} \ll \omega$, dus slappe veer en zware massa, aangezien in de praktijk ω van de vloer klein is (1 - 30 Hz). Daarom



figuur 4.9 : modellisatie van het gedrag van een voertuig op de weg.



figuur 4.10 : Transfertfunctie X/X_0 in functie van ω / ω_n

wordt het meetinstrument op een zware (betonnen) massa geplaatst, die zelf op isolatoren opgesteld staat. In sommige gevallen zoals optische banken en meetbanken wordt ook wel luchtvering toegepast. (kleine k).

4.4. Toepassingsvoorbeelden van trillingsisolatie

4.4.1 Trillingsisolatie van een voertuig t.o.v. oneffenheden in de weg.

Bij het ontwerp van veersystemen van voertuigen (personenwagens, autobussen, vrachtwagens), moet er voor gezorgd worden dat de oneffenheden van de weg zo weinig mogelijk doorgegeven worden naar het koetswerk en zijn inzittenden.

Dit is zeker geen eenvoudige opgave, als men rekening houdt met volgende parameters:

- de frekwentie, waarmee het voertuig geexciteerd wordt is afhankelijk van de golflengte van de oneffenheden en de snelheid, waarmee het voertuig over deze oneffenheden rijdt.
- de amplitude van de excitatie is enkel afhankelijk van de hoogte van de oneffenheden (indien we een perfect contact onderstellen tussen band en wegdek).
- de massa van het voertuig verandert in functie van de lading. Deze variaties kunnen erg belangrijk zijn bij autobussen en vrachtwagens.

Het gedrag van het voertuig op de weg kan, indien men de rotatie van het koetswerk buiten beschouwing houdt en elasticiteit en demping van de banden verwaarloosd wordt, voorgesteld worden door een eenvoudig massa-veer-dempermodel, zoals voorgesteld is in **figuur 4.9**.

De vergelijking voor dit model is

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = k x_0 + b v_0$$

met

$$x_0 = X_0 \sin \omega t$$

$$v_0 = \omega X_0 \cos \omega t$$

$$\omega = 2 \pi \frac{v}{\lambda}$$

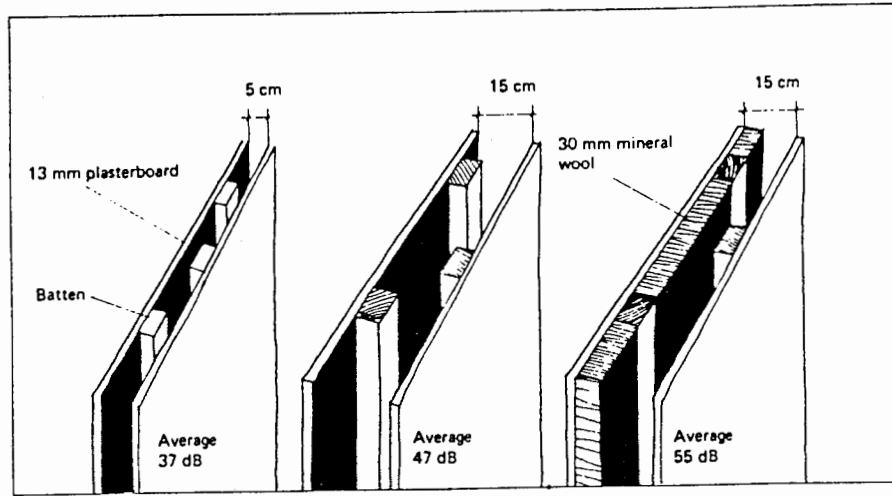
v = snelheid van het voertuig

λ = golflengte van de weg d.i. de afstand tussen 2 pieken of putten.

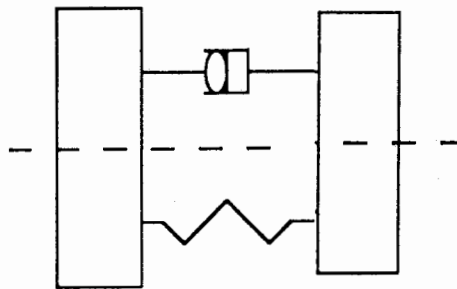
De functie x/x_0 is voorgesteld in **Figuur 4.10**.

Ze toont ons duidelijk dat :

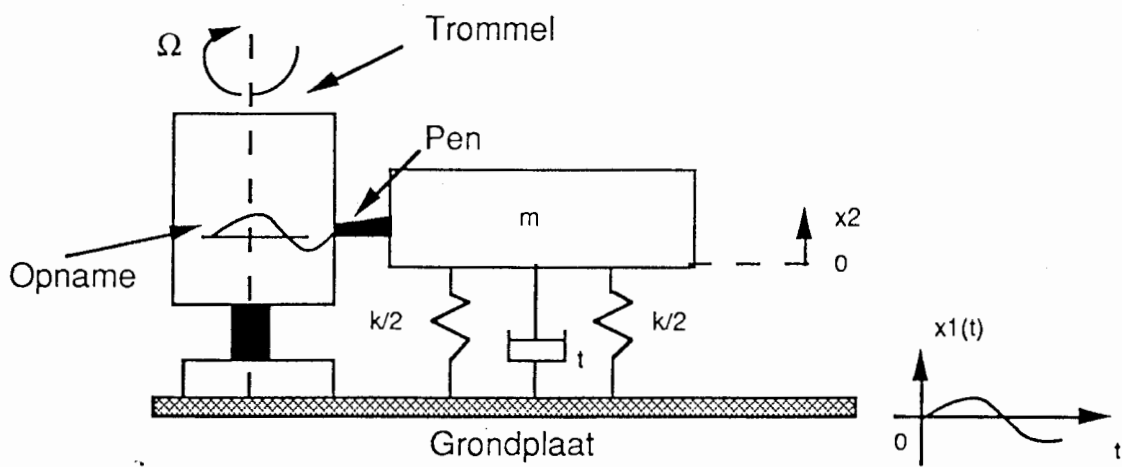
- a. om een goede trillingsisolatie te bekomen zal $\omega > \sqrt{2} \omega_n$ Gezien de lage waarden die ω kan bereiken, dient ω_n klein gekozen te worden. Dit kan gebeuren door k klein te



Figuur 4.11 : De geluidsisolatie van een dubbele wand



Figuur 4.12 : Modellisatie van de dubbele wand.



figuur 4.13 : seismometer om de trillingen van de aardkorst te registreren

kiezen (slappe veer). Dit is echter niet altijd mogelijk. Een vrachtwagen heeft stijve veren nodig om het vervoer van grote lasten toe te laten.

Dit betekent echter dat de trillingsisolatie niet optimaal is en daarenboven slechter wordt naargelang de vrachtwagen minder geladen is. Dit kan opgelost worden door ofwel de bestuurderszetel ofwel de kabine op een aangepast veerdempersysteem te plaatsen.

Bij autobussen is dit echter niet mogelijk, en daar neemt men dan ook zijn toevlucht tot luchtvering (lastonafhankelijk), zoals we in **paragraaf 1.6** aangetoond hebben.

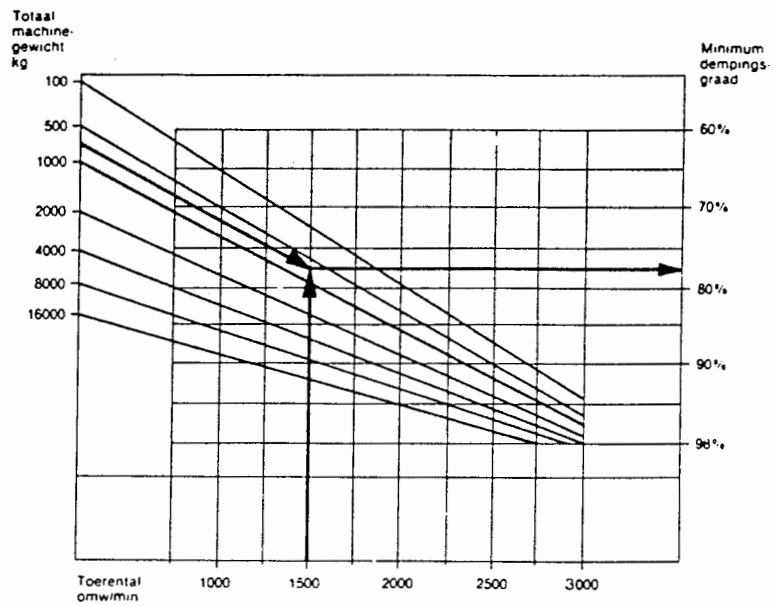
- b. De efficiënte werking van de trillingsisolatie is tevens afhankelijk van de golflengte van de oneffenheden en de snelheid waarmee men rijdt. Hoe groter de golflengte en hoe trager men rijdt des te slechter de trillingsisolatie zal zijn.

4.4.2 Akoestische isolatie van een dubbele wand (Figuur 4.11).

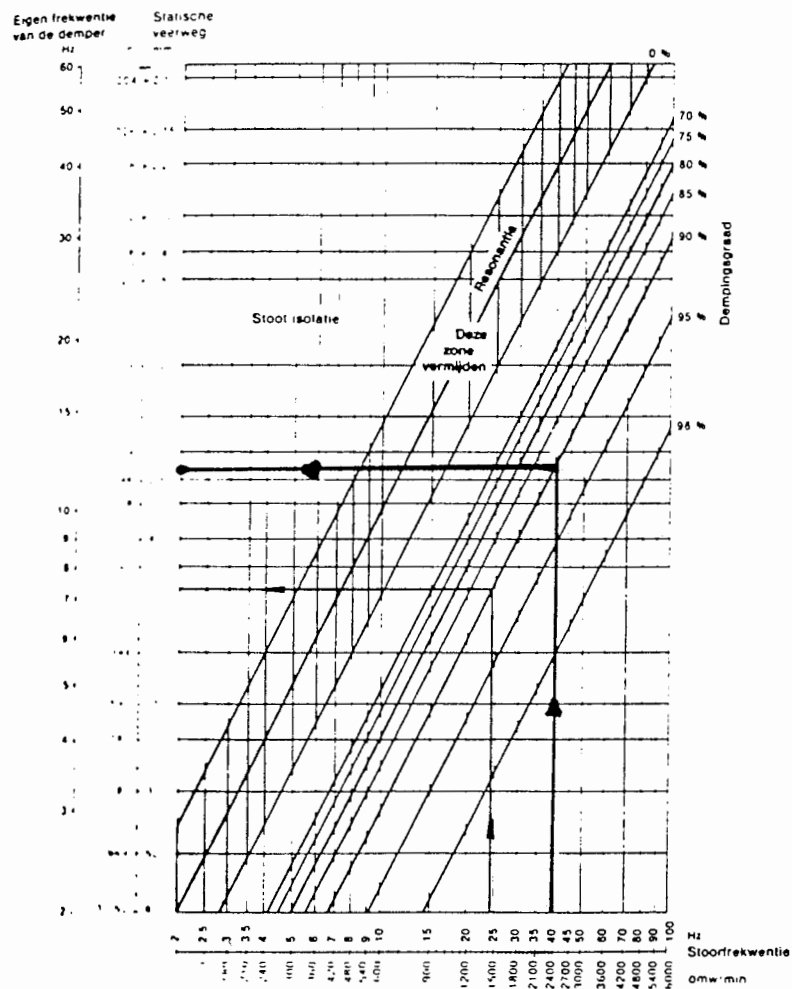
Geluidsgolven die invallen op een wand, brengen deze wand aan het trillen. Indien het nu om een dubbele wand gaat, zal de trillingsoverdracht naar de andere wand gebeuren via de lucht. De tweede wand zal dan weerom geluid afstralen. De verhouding tussen de trillingsamplitudes van de eerste en de tweede wand bepaalt samen met nog andere parameters, de isolatiewaarde.

Het geheel kan men modelleren zoals voorgesteld is in **Figuur 4.12**. De transfertfunctie voor dit massa-veer-demper model is voorgesteld in **Figuur 4.10**. Hier bemerkt men duidelijk dat de eigenfrequentie van het systeem wand-lucht-wand onder de audio-frekwenties gelegen moet zijn.

- 4.4.3 **Seismograaf (Figuur 4.13)** : de aarde doet de basisplaat van het instrument trillen, waardoor de trommel met papierband op en neer beweegt langs de massa m (met pen) die stilstaat, omdat deze geïsoleerd is door middel van een goed gekozen veer. (slappe veer)



Figuur 4.15 : Vereiste dempingsgraad bij machines



Figuur 4.16 : Statische veerweg als functie van dempingsgraad en frekwentie

4.5. De keuze van de dempers voor een effectieve trillingsisolatie

4.5.0 Probleemstelling

Teneinde een effectieve elastische ophanging te bepalen, moet men precies de essentiële karakteristieken van de machine met inbegrip van de excitatie kennen.

Excitatie

trillingen
frequentie -----> uitwijking van de steunen in functie van de
hoofdrichting gewenste demping; hoogste elasticiteit van de steun

Machine = structuur

zwaartepunt
gewicht -----> belasting per steun
en lokalisatie

4.5.1 Te volgen procedure

1. Bepaal de stoorfrequentie

Deze is meestal gelijk aan het toerental van de machine of het laagste toerental van de bewegende onderdelen van een unit. Indien het trillingsgedrag, veroorzaakt door de bewegende onderdelen te complex is, zal men moeten overgaan op een frequentieanalyse, teneinde de belangrijkste frequentiecomponenten te bepalen.

2. Bepaal de gewenste dempingsgraad

Meestal zal deze tussen de 80 % en 95 % liggen. Bij machines, waarvan de roterende massa klein is, in vergelijking met de totale massa van de machine, kan de minimaal aanvaardbare dempingsgraad worden bepaald met behulp van **figuur 4.15**.

3. Bepaal de statische veerweg

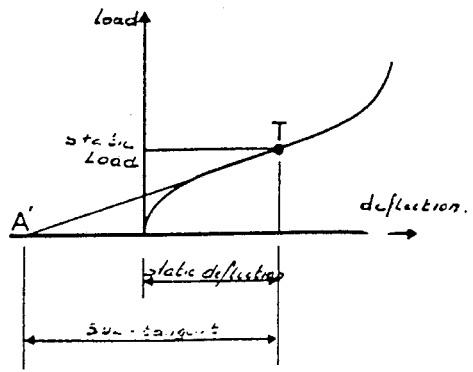
Met behulp van de bekomen waarden voor de stoorfrequentie en dempingsgraad kan in **figuur 4.16** de vereiste veerweg worden afgelezen. Onder statische veerweg wordt verstaan de indrukking van het rubber onder belasting. Hoe groter de veerweg, hoe groter de verkregen isolatie.

Door het verband tussen de veerweg enerzijds, demping en excitatiefrequentie anderzijds te gebruiken, gaan we terug naar de elementaire dynamika van de veer. Wij zullen de uitwijking bepalen.

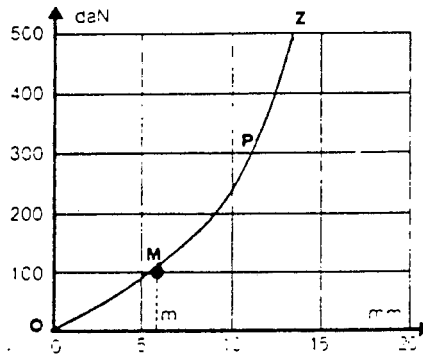
a. Uitwijking en tangentiële componenten (**figuur 4.17**)

Op een curve belasting/uitwijking van een steun kunnen wij de uitwijking en de tangentiële componenten definiëren.

Voor een bepaalde statische belasting, kan men de vervorming van de veer of demper berekenen. De elasticiteit van de veer bij die bepaalde belasting wordt bepaald door de tangentiële componenten.



Figuur 4.17 : Veer karakteristiek van een demper.



Figuur 4.18 : Werkingsgebieden in de veer karakteristiek.

Substitutie in de formule van de eigenfrequentie geeft :

$$F = m \cdot g = k \cdot x = k [T' A']$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{T' A'}}$$

In het geval van een lineaire veer (lineair verband tussen belasting en uitwijking) zijn de uitwijking en tangentiële componenten gelijk. Indien dit niet zo is, dan zal men als werkingspunt een buigpunt van de curve te nemen, om zo de tangentiële componenten ($T' A'$) te vergroten, en aldus een zo laag mogelijke eigenfrequentie te bekomen.

b. Gebruiksdomein

Dankzij de niet-lineaire karakteristiek kan een zelfde demper soms gebruikt worden om een goede trillingsisolatie te bekomen in verschillende gevallen (fig. 4.18). De zone OM is de zone van de statische belastingen; de uitwijking is proportioneel met de belasting.

De zone MP is de zone van de dynamische belastingen en de zone PZ deze voor uitzonderlijke schokken. Er is een progressieve stijfheid en de uitwijking is er beperkt. De demper past zich aan aan de excitatie. De uitwijking mag om redenen van praktische aard niet te groot worden.

4. Bepaal de belasting per trillingsdemper

Hiervoor dient het totaal gewicht van de te isoleren machine gedeeld te worden door het gewenste aantal trillingdempers.

Dit is het meest eenvoudige geval. In de praktijk zal men meestal als volgt tewerk moeten gaan :

a. Bepaling van het zwaartepunt

Dit zal bepaald worden aan de hand van :

- informatie van de constructeur (plannen, berekeningen, enz...)
- grafische methode, als het gewicht en het zwaartepunt van de onderdelen gekend zijn
- experimenteel onderzoek.

Hieruit bepaalt men het gewicht van de machine, evenals de positie van het zwaartepunt.

b. Bepaling van de belasting per steun

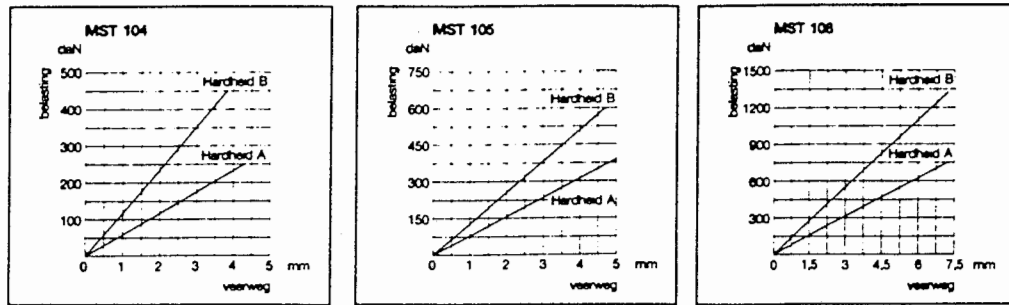
Er zijn hier 2 mogelijkheden :

1. Het aantal en de positie van de bevestigingspunten zijn vrij te bepalen.

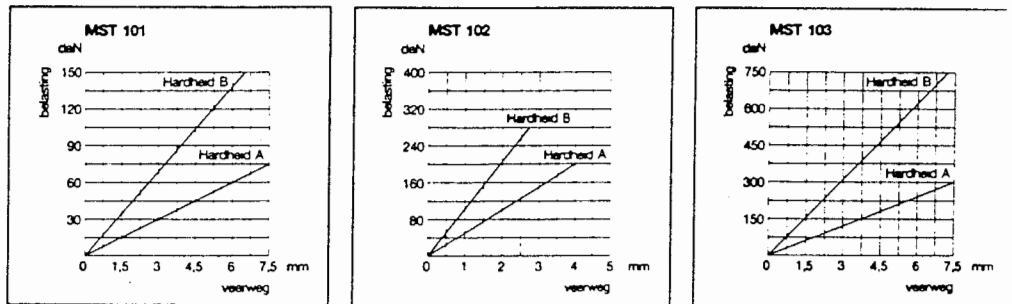
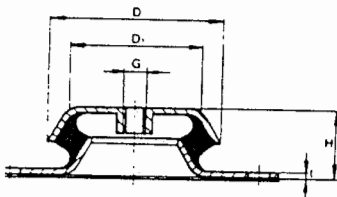
In dat geval, kiest men de positie (het aantal) van de bevestigingspunten zo, dat de draagkracht per steun dezelfde is.

2. Het aantal en de positie van de bevestigingspunten zijn opgelegd, zoals meestal in de praktijk het geval is.

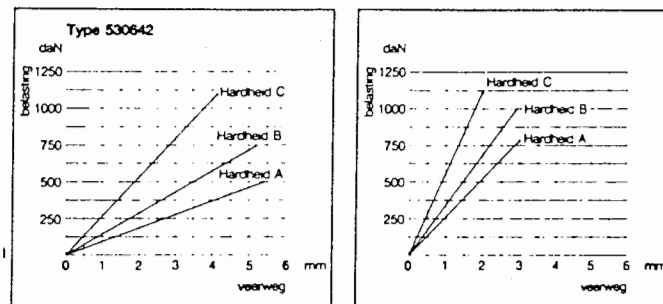
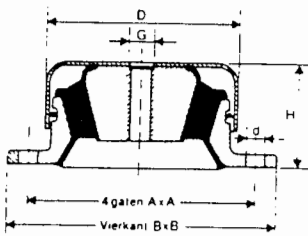
De belasting in elk bevestigingspunt zal niet dezelfde zijn. Grafische en numerieke methoden zullen de belasting per bevestigingspunt bepalen.



Figuur 4.19 : Voorbeelden van veercharacteristieken.



Figuur 4.20 : Veercharacteristiek



Figuur 4.21 : Veercharacteristiek

Men zal in de mate van het mogelijke de ophanging zo realiseren dat zoveel mogelijk identieke bevestigingspunten bekomen worden. Zoniet zijn steunpunten van verschillende stijfheid vereist en is een zorgvuldige montage, noodzakelijk.

5. Keuze van de trillingsdemper

Vanaf dit punt maakt men gebruik van de stijfheidsgrafieken van de trillingsdemperkonstruktors. Figuur 4.19 geeft ons enkele voorbeelden. Wij zullen verder aan de hand van enkele voorbeelden zien hoe we de geschikte trillingsdemper kiezen.

6. Definitieve keuze

Eens een definitieve keuze gemaakt, kan men nagaan welke demping de gekozen demper (theoretisch) zou geven.

4.5.2 Voorbeelden [5] [6]

1. Een ventilator met elektromotor weegt totaal 180 kg en wordt direct aangedreven met een toerental van 1450 tpm.

Het geheel is gemonteerd op een stalen frame van 60 kg.

Tussen het frame en de vloer moeten 4 trillingsdempers worden aangebracht. Kies deze zodanig dat de dempingsgraad minstens 90 % is.

Men bepaalt hier allereerst de excitatiefrequentie, welke gelijk is aan 1450 tpm of 24.2 Hz. De kennis van de gewenste dempingsgraad laat ons toe om de statische veerweg te bepalen door middel van **figuur 4.16**.

Men vindt als statische veerweg 6 mm. Het totaal gewicht van de groep bedraagt :

$$180 + 60 = 240 \text{ kg.}$$

Dit wordt gelijkmatig verdeeld over 4 trillingsdempers.

Per trillingsdemper is de belasting dan :

$$240/4 = 60 \text{ kg} = 600 \text{ N.}$$

Gebruikmakend van de veer karakteristieken voorgesteld in **figuur 4.20** (de belasting is weergegeven in daN!) kan men de geschikte demper kiezen.

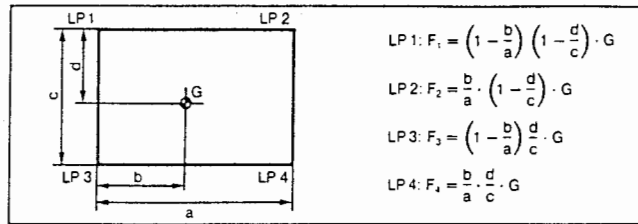
De aangewezen demper is type MST 101 met als hardheid A. [5].

De toegestane belasting van dit type demper is 75 kg, zodat deze trillingsdemper een kleine veiligheid bezit tegenover schokken.

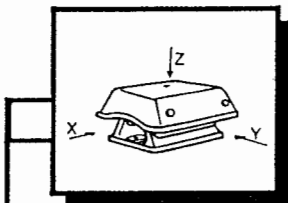
2. Een 6 cylinder viertakt dieselmotor drijft d.m.v. een flexibele askoppeling een dynamo aan. Toerental van de dieselmotor is 800 tpm. De dieselmotor en de dynamo staan op gescheiden fundatieframes. Men wil de dieselmotor op 6 trillingsdempers plaatsen. Totaal gewicht van de motor plus het fundatieframe is 2100 kg. Dempingsgraad minstens 90 %.

6-cilindermotoren worden gekenmerkt door een bijzondere zachte loop [8]. In het frequentiespektrum zijn de fundamentele ($800/60 = 13.3 \text{ Hz}$) en de tweede harmonische (26.5 Hz) niet belangrijk. Een belangrijke bijdrage wordt geleverd door de 3e. harmonische. Dit komt overeen met de frequentie van de arbeidsslag van deze 4-takt motor.

$$(800 \times 6) / (2 \times 60) = 40 \text{ Hz.}$$



Figuur 4.22 : Lay-out van de machine.



Freudenberg Machine Mounts

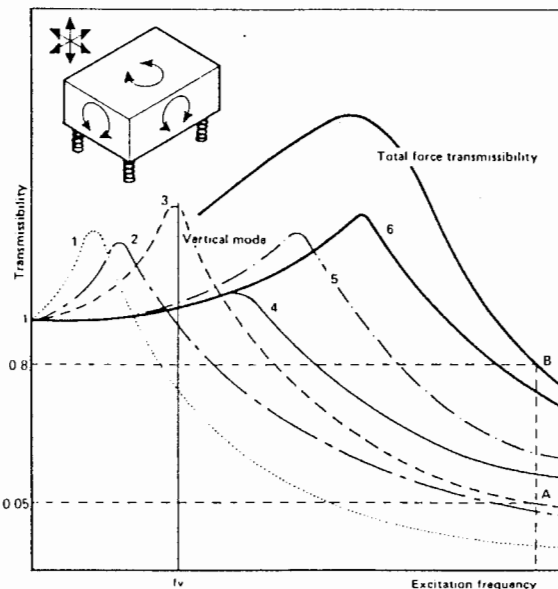
Part No.	rubber mix CF	type	dimensions			thread M	nominal values	
			D mm	H ¹⁾ mm	B mm		F _{Z max} N	s _{Z max} mm
5018 001	11 MN 45	A 3	122	72	128	M 12	1300	5.8
5018 001	11 MN 50	A 2	122	72	128	M 12	1800	5.8
5018 001	11 MN 60	A 1	122	72	128	M 12	2500	5.8
5018 001	11 MN 70	A 0	122	72	128	M 12	3800	5.8
5018 002	11 MN 45	B 3	228	110	204	M 16	5000	6.0
5018 002	11 MN 55	B 2	228	110	204	M 16	9000	6.0
5018 002	11 MN 60	B 1	228	110	204	M 16	12000	6.0
5018 002	11 MN 70	B 0	228	110	204	M 16	16000	6.0
5018 004	11 MN 45	HD 3	228	125	204	M 16	4800	12.0
5018 004	11 MN 55	HD 2	228	125	204	M 16	7200	12.0
5018 004	11 MN 60	HD 1	228	125	204	M 16	8800	12.0
5018 004	11 MN 70	HD 0	228	125	204	M 16	11000	11.0

1) unloaded

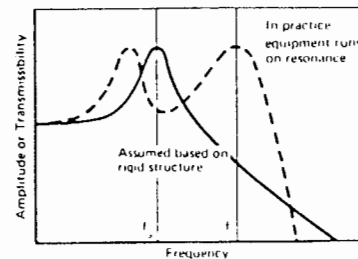
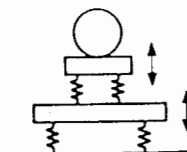
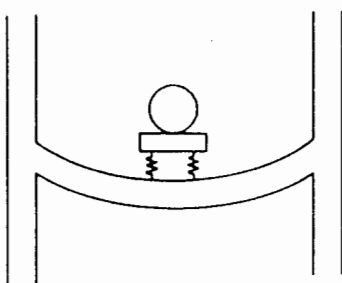
F_{max} = maximum load per mount

s_{max} = deflection under maximum load

Figuur 4.23 : Veer karakteristiek.



Figuur 4.24 : Invloed van andere vrijheidsgraden.



Een dempingsgraad van minstens 90 % is vereist wat inhoudt dat de statische veerweg 2.5 mm moet zijn (en liefst groter). (Figuur 4.16).

De belasting per steun is $2100/6 = 350$ kg, indien de belasting gelijkmatig verdeeld wordt over de 6 steunen.

Men kiest voor het type Stabiflex 530642, hardheid A (Figuur 4.21) [5].

Deze geeft bij een belasting van 350 kg een veerweg van 3.5 mm.

De dempingsgraad, die hiermede bereikt wordt, bedraagt ongeveer 94 %.

3. Een machine weegt 1.000 kg en heeft een toerentalbereik gelegen tussen 1200 en 2500 tpm. Men wenst een dempingsgraad te bekomen van 80 %.

Een lay-out van het machineonderstel is gegeven in figuur 4.22.

De excitatiefrequentie wordt gelijk genomen aan 1200 tpm. of 20 Hz. Om hierbij een dempingsgraad te bekomen van 80 % moet de statische veerweg 5 mm bedragen.

De berekening van de belasting per steunpunt geeft :

$$F_1 = 3300 \text{ N}$$

$$F_2 = 2700 \text{ N}$$

$$F_3 = 2200 \text{ N}$$

$$F_4 = 1800 \text{ N}$$

Daar de belasting varieert per steunpunt, zal men verschillende dempers moeten kiezen. Voor steunpunten 1 en 2 neemt men type A0 en voor 3 en 4 het type A1 [6] (figuur 4.23)

Men kan nagaan dat voor al de steunpunten de vooropgestelde 80 % dempingsgraad bereikt wordt.

4.5.3 Nabeschouwing [7]

Het verdient aanbeveling om in-situ de werkelijke bekomen trillingsdemping na te gaan. Immers men is uitgegaan van een fel vereenvoudigde theorie van de rechte trillingen met 1 vrijheidsgraad. De werkelijkheid kan veel complexer zijn. Figuren 4.24 en 4.25 geven ons respectievelijk de invloed van de andere vrijheidsgraden en van de soepelheid van de vloer. Voorzichtigheid is dus hier beslist op zijn plaats ! Gedurende de praktische oefeningen, zal de student zich hiervan kunnen vergewissen [9]

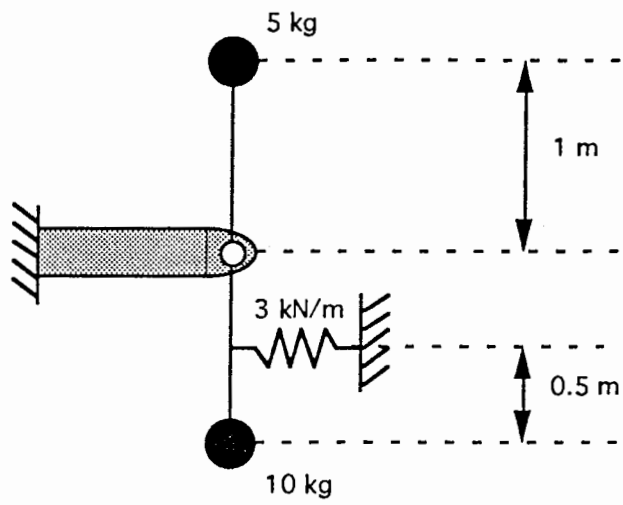


Referenties

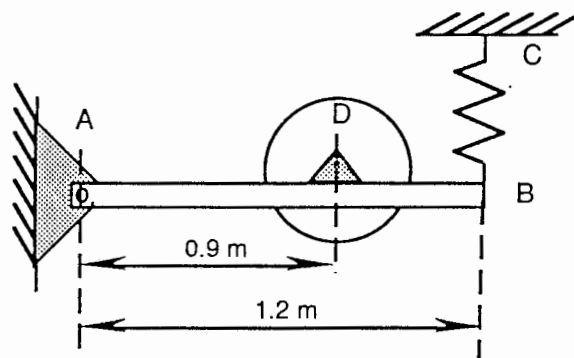
1. Van Overmeire M., "A Primer on Vibration Analysis",
Course Notes A.I.B.-Vinçotte, 1985
2. Harris C.M., Crede C.E. (Editors)
Shock and Vibration Handbook, 3 volumes
Mc Graw-Hill, New-York, 1961.
3. Jackson C. "The Practical Vibration Primer"
Gulf Publishing Company, Houston, 1979.
4. Den Hartog J.P. "Mechanical Vibrations"
Mc Graw-Hill, 1956.
5. Eriks rubbertechniek "Trillingsdempers"
Algemene catalogus.
6. Freudenberg - Megulastik "Standard-Bauelemente für die
Schwingungsisolierung". Allgemeine Catalogus
7. Fry Alan (Ed.) "Noise Control in Building Services"
Pergamon Press, Oxford, 1988.
8. Van Overmeire, M. "Verbrandingsmotoren".
V.U.B.-Uitgaven, 1991.
9. Labonota's "Kinematika en Dynamika der Werktuigen"
Uitgave dienst Werktuigkunde 1992.

Normen

- ISO 2631 1985 Evaluation of human exposure to whole-body vibration.
- ISO 2372 1974 Mechanical vibration of machines with operating speeds from 10 to 200 rev/s - Basis for specifying standards.
- ISO 8002 1988 Mechanical vibrations - Land vehicles - Method for reporting measured data.
- ISO 4866 1990 Mechanical vibration and shock - vibration of buildings and evaluation of their effects on buildings.



Figuur 0.1



Figuur 0.2

OPGAVEN

1. Een massaloos onderstelde staaf met een lengte van 2 meter is scharnierend opgehangen in het midden. Aan de bovenzijde van de staaf is een geconcentreerde massa van 5 kg bevestigd; aan de onderkant 10 kg. Op 50 cm van de onderkant is de staaf verbonden via een massaloos onderstelde veer, die een stijfheid heeft van 3 kN/m. (**Figuur 0.1**)

Hoeveel bedraagt de natuurlijke eigenfrequentie van dit systeem, als men kleine hoekverdraaiingen onderstelt?

2. Het systeem, zoals afgebeeld in **figuur 0.2**, bestaat uit een homogene staaf AB, die 1.2 m lang is en 8 kg weegt, en scharnierend is opgehangen in uiteinde A. Het uiteinde B is opgehangen aan een veer met stijfheid 4.5 kN/m. Op een afstand 0.9 m van uiteinde A bevindt zich een schijf van 28 kg dat gelagerd is op de staaf AB (punt D). Bij evenwicht is de staaf AB horizontaal. We beschouwen enkel kleine bewegingen in het vlak van het blad.

Vraag a: Hoeveel bedraagt de eigenfrequentie van dit systeem?

Vraag b: Als het zwaartepunt van de schijf 3 mm uit het rotatiecentrum ligt, wat is dan de totale verticale verplaatsing van het punt B als de rotatiesnelheid van het wiel 200 tpm bedraagt?

3. Een motor-compressorgroep, zoals afgebeeld in **figuur 0.3**, weegt 120 kg en draait aan een snelheid van 2900 tpm. Bij dit toerental treedt er een stoorkracht van 400 N op. Het geheel, bestaande uit de groep en het onderstel (hetgeen massaloos mag ondersteld worden) is gemonteerd op 4 isolatoren, waarvan volgende gegevens bekend zijn:

veerconstante 3200 kN/m
dempingsconstante 1800 Ns/m

Vraag a: Hoeveel bedraagt de verplaatsingsamplitude van de groep in regimetoestand?

Vraag b: Hoeveel bedraagt de kracht, overgebracht op de omgeving?

Vraag c: Teken het krachtendiagramma met alle aanwezige krachten.

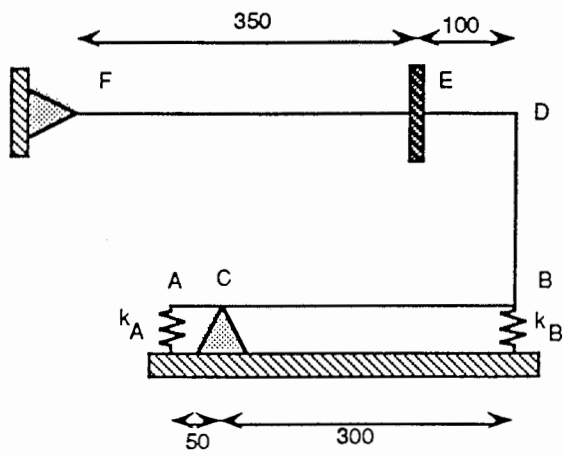
Vraag d: Vorm een besluit aangaande de keuze van de isolatoren.

Zijn ze goed of slecht gekozen?

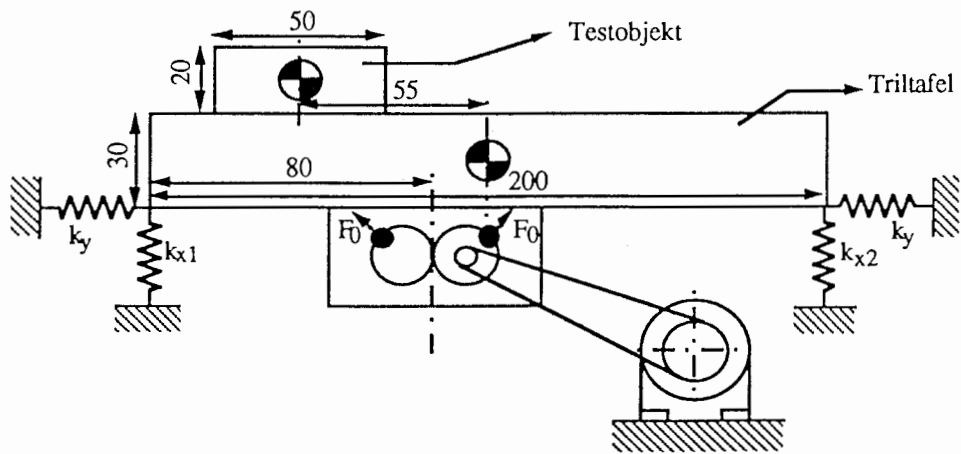
Indien goed, waarom?

Indien slecht, waarom? Geef eventueel een alternatief.

4. Een staaf AB van 6 kg is scharnierend opgesteld in punt C en wordt aan de uiteinden A en B ondersteund door veren die elk een veerconstante van 5.6 N/mm bezitten. Deze staaf, waarvan de gyradiestraal rond C 75 mm bedraagt, is door een massaloze staaf DB (D en B zijn scharnierpunten) verbonden met staaf FD, die 1 kg weegt, scharnierend is opgesteld in punt F en die op een afstand van 350 mm (**Figuur 0.4**) van dit scharnierpunt F een schijf van 750 g draagt. Een schets van deze constructie in rust is voorgesteld in onderstaande figuur. De afstanden zijn allen uitgedrukt in mm. Hoeveel bedraagt de eigenfrequentie van dit systeem? (Beschouw kleine bewegingen)



Figuur 0.3

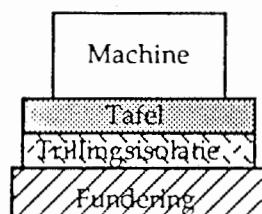


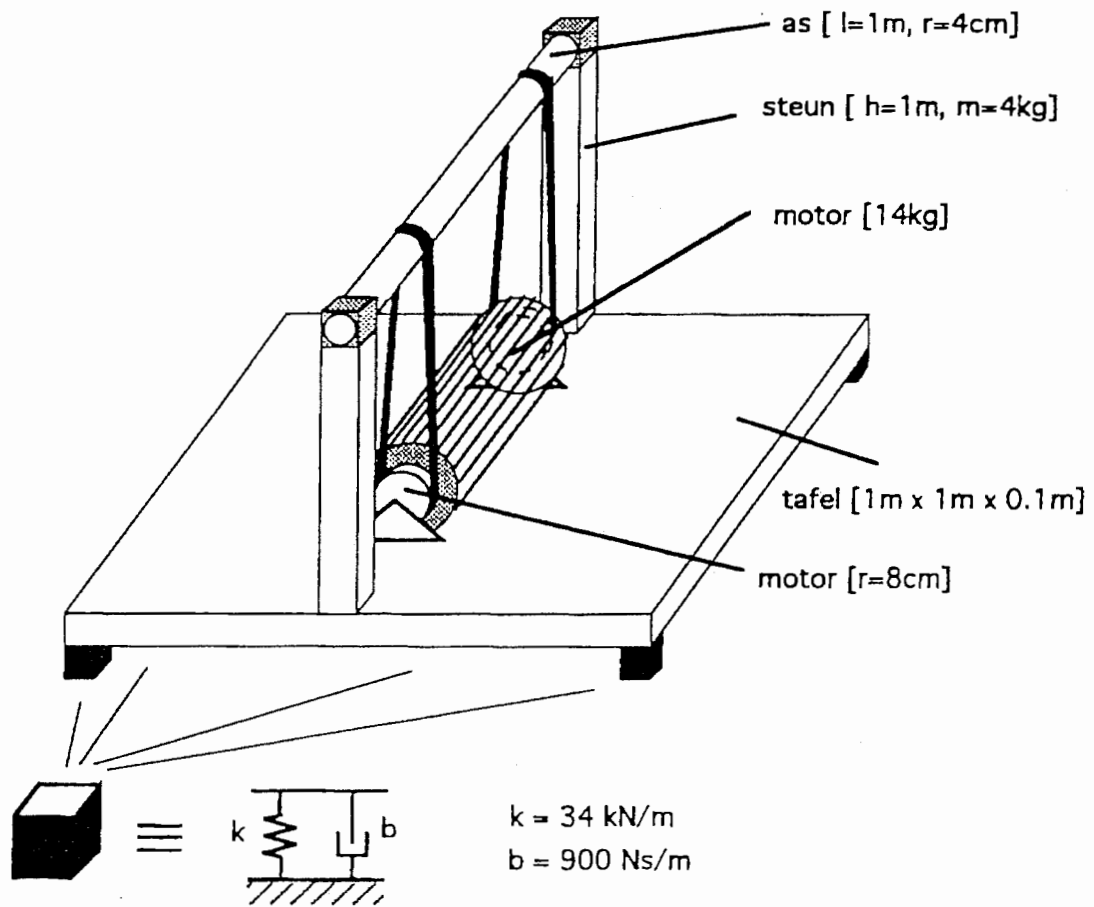
Figuur 0.4

5. Twee gewichtjes die in tegengestelde richting draaien worden gebruikt om een triltafel te exciteren. Doordat de gewichtjes in tegengestelde richting bewegen is hun resulterende traagheidskracht steeds vertikaal gericht. Elk van de roterende massa's weegt 500 g en is bevestigd op een straal van 10 cm. **(Figuur 0.5)**
Op de triltafel, die 10 kg weegt, wordt een testobject van 1 kg bevestigd, op een positie zoals aangegeven op de figuur. De triltafel rust onderaan op vier veren (slechts twee worden aangegeven op de figuur), 2 met een veerconstante k_{x1} en 2 met een veerconstante k_{x2} . Zijdelings wordt de tafel ondersteund door veren die oneindig stijf verondersteld mogen worden. Het traagheidsmoment van het systeem mag als gekend ondersteld worden.

Gevraagd wordt :

1. Stel de bewegingsvergelijkingen van het systeem op. Kies hierbij k_{x1} en k_{x2} zodanig dat de optredende bewegingen ontkoppeld zijn.
 2. Bepaal voor dit ontkoppelde systeem de veerconstanten opdat de maximale verplaatsingsamplitude van het massamiddelpunt niet meer dan 5 mm zou bedragen, en dit voor een toerentalbereik van 0 tot 2000 tpm.
 3. Wat gebeurt er in dat geval met beide relevante trillingsamplitudes van het massamiddelpunt als ω naar oneindig streeft ?
 4. Wat verandert er, kwalitatief gezien, als de massa van het testobject 2,5 kg wordt ?
6. De opstelling die afgebeeld is in onderstaande figuur heeft een totale massa van 95 kg. Men wilt aan de bovenste (=dunne) as 2 gewichten van elk 250 g laten draaien zonder dat de verticale trillingsamplitude groter wordt dan 1 mm. Hoe ver mogen deze gewichten van de as verwijderd zijn, als de motor draait met een snelheid die 40 % bedraagt van de snelheid waarbij het volledige systeem in (faze)resonantie is? Onderstel hierbij dat de opstelling symmetrisch is en dat de motor perfect uitgebalanceerd is.
7. Een machine (massa $M_m = 300$ kg) werd uitgebalanceerd bij $\omega_{bal} = 3000$ tpm en voldoet net aan de voorwaarden voor uitbalanceringsklasse G6,3. Deze machine werd gemonteerd op een tafel (massa $M_t = 150$ kg) die via een trillingsisolatie aan de ∞ -stijve fundering is bevestigd. Proefdraaien laat toe vast te stellen dat faseresonantie optreedt bij een draaisnelheid van 2000 tpm. Bij deze draaisnelheid bedraagt de amplitude van de fluctuerende component van de kracht uitgeoefend op de omgeving $F_T = 700$ N.





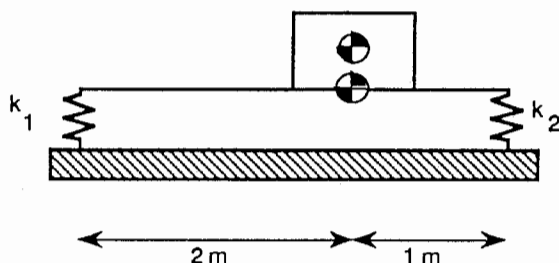
Figuur 0.5

Bepaal :

- a) De grootte van de maximale trillingsamplitude van de machine en het toerental waarbij deze optreedt.
- b) Schets het verloop van F_T voor toerentallen tussen 0 en 16000 tpm. Wat is het bruikbare toerentalbereik indien we bovenkritisch wensen te werken en F_T tot 350 N beperkt moet worden? De bepaling van dit toerentalbereik mag grafisch gebeuren (nauwkeurigheid van ± 500 tpm is voldoende).

MEERKEUZEVRAGEN

1. Een meettoestel dat 101 kg weegt, wordt op een meettafel van 1000 kg geplaatst zoals aangegeven op onderstaande figuur.



Figuur M.1

Om een trillingsisolatie te bekomen voor excitaties met een frequentie die groter is dan 2 Hz, dient men het volgende te doen :

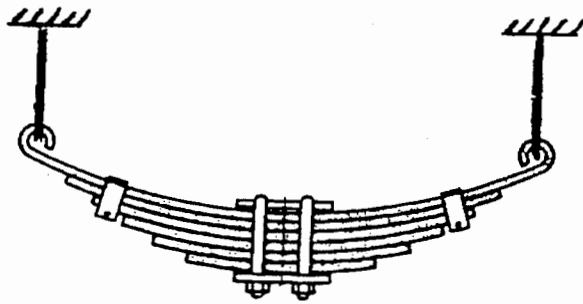
- a. k_1 kleiner kiezen dan 29 N/mm en k_2 kleiner kiezen dan 58 N/mm
- b. k_1 kleiner kiezen dan 58 N/mm en k_2 kleiner kiezen dan 106 N/mm
- c. k_1 kleiner kiezen dan 735 N/m en k_2 kleiner kiezen dan 1470 N/m
- d. k_1 en k_2 groter kiezen dan 87 N/mm
- e. k_1 en k_2 kleiner kiezen dan 43 N/mm
- f. de demping kleiner of gelijk aan 38 Ns/mm kiezen

Men mag onderstellen dat ieder steunpunt een zuiver rechtlijnige beweging uitvoert.

2. Een vier-cilinder tweetakt-dieselmotor met een vermogen van 600 kW drijft rechtstreeks een 3-bladige centrifugaalpompe aan. De rotatiesnelheid van de motor bedraagt 300 tpm. Men stelt een te grote radiale trilling vast van 12 mm/s R.M.S. op het lager van de motor. De voornaamste spektrale component ligt bij 10 Hz en bedraagt 12 mm/s R.M.S.

Om dit trillingsprobleem op te lossen, dient men :

- a. de motor uit te balanceren;
- b. de pompe uit te balanceren;
- c. beide uit te balanceren;
- d. een gepaste trillingsisolatie te voorzien.



Figuur M.2

3. Een piëzo-elektrische versnellingsopnemer kan gebruikt worden om laagfrequent trillingen in gebouwen te meten indien :
- zijn gevoeligheid (pC/m/s^2) hoog is;
 - zijn resonantiefrequentie hoog is;
 - steeds gebruikt worden onafhankelijk van zijn gevoeligheid en resonantiefrequentie;
 - nooit gebruikt worden.
4. Een motor-pompeenheid weegt 1000 kg en heeft een rotatiesnelheid van 1500 tpm. De machine wordt geplaatst op 4 veren, die symmetrisch geplaatst worden. Men wenst een zo goed mogelijke trillingsisolatie te bekomen. De veerstijfheid :
- wordt kleiner genomen dan 3084 N/mm
 - wordt groter genomen dan 6.168 kN/mm
 - wordt kleiner genomen dan 12.4 kN/mm
 - speelt geen rol, maar wel de demping. Deze wordt gelijk genomen aan 27.7 Ns/mm.
5. De eigenfrequentie van de bladveer, getekend in **figuur M.2** valt samen met één van de excitatiefrequenties. Om de eigenfrequentie van deze bladen te verlagen, dient men
- de steunpunten verder uit te mekaar te plaatsen
 - de steunpunten dichter bij mekaar te plaatsen
 - de belasting op de veer te verlagen
6. Voor een trillingsgevoelig meettoestel dat 30 kg weegt, is een trillingsvrije opstelling ontworpen, waarvan het gewicht 200 kg bedraagt en de stijfheid 4.5 N/mm. Deze opstelling isoleert de meetapparatuur tot een frequentie van :
- 6.3 Hz
 - 4.5 Hz
 - 0.02 Hz
 - 0.1 Hz
 - 1 Hz
7. Een machine kan gemodelliseerd worden met de volgende modelparameters $m = 10\,000$ kg, $k = 1$ kN/mm en $b = 1$ Ns/mm. De as van deze machine bezit een onbalans van 6 kg mm. De rotatiesnelheid is 6000 tpm. De trillingsamplitude bedraagt dan benaderd :
- 0,6 mm
 - 0,6 μm
 - 1 mm
 - is niet te bepalen
8. Een motor-kompressoreenheid weegt 10 000 kg en heeft een rotatiesnelheid van 3000 tpm. De machine wordt geplaatst op 4 identieke veren, die symmetrisch geplaatst worden. Men wenst een zo goed mogelijke trillingsisolatie te bekomen. Door aerodynamische instabiliteiten valt de voornaamste trillingsexcitatie samen met de 5de. harmonische.

De veerstijfheid dient minstens te voldoen aan volgende voorwaarde : ze

- a. wordt kleiner genomen dan 123 kN/mm
 - b. wordt kleiner genomen dan 3084 kN/mm
 - c. wordt groter genomen dan 250 kN/mm
 - d. wordt kleiner genomen dan 492 kN/mm
 - e. Speelt geen rol maar wel de demping.
Deze wordt gelijk genomen aan 100 Ns/mm.
9. Een trillingsgevoelig toestel is geplaatst op een tafel, welke rust op een rubberen mat waarvan de veerstijfheid 6 N/mm bedraagt. Welke massa moet de tafel minimaal bezitten om dit toestel te isoleren voor trillingsfrequenties tot en met 0.5 Hz ?
- a. 24 kg
 - b. 48 kg
 - c. 1220 kg
 - d. 48000 kg

